

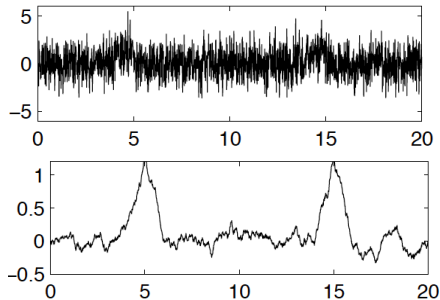
TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES

Fabrice HEITZ
Télécom PS / UdS / ICube CNRS

Septembre 2014

Introduction

TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES



Traitement des signaux aléatoires

- ➊ Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle
- ➋ Signaux aléatoires : représentation spectrale
- ➌ Modèles de signaux aléatoires et bruits
- ➍ Détection de signaux bruités
- ➎ Filtrage des signaux aléatoires
- ➏ Estimation statistique
- ➐ Estimation spectrale
- ➑ Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Traitement des signaux aléatoires

- ➊ Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle
- ➋ Signaux aléatoires : représentation spectrale
- ➌ Modèles de signaux aléatoires et bruits
- ➍ Détection de signaux bruités
- ➎ Filtrage des signaux aléatoires
- ➏ Estimation statistique
- ➐ Estimation spectrale
- ➑ Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Traitement des signaux aléatoires

- ➊ Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle
- ➋ Signaux aléatoires : représentation spectrale
- ➌ Modèles de signaux aléatoires et bruits
- ➍ Détection de signaux bruités
- ➎ Filtrage des signaux aléatoires
- ➏ Estimation statistique
- ➐ Estimation spectrale
- ➑ Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Traitement des signaux aléatoires

- 1 Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle
- 2 Signaux aléatoires : représentation spectrale
- 3 Modèles de signaux aléatoires et bruits
- 4 Détection de signaux bruités
- 5 Filtrage des signaux aléatoires
- 6 Estimation statistique
- 7 Estimation spectrale
- 8 Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Traitement des signaux aléatoires

- 1 Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle
- 2 Signaux aléatoires : représentation spectrale
- 3 Modèles de signaux aléatoires et bruits
- 4 Détection de signaux bruités
- 5 Filtrage des signaux aléatoires
- 6 Estimation statistique
- 7 Estimation spectrale
- 8 Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Traitement des signaux aléatoires

- 1 Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle
- 2 Signaux aléatoires : représentation spectrale
- 3 Modèles de signaux aléatoires et bruits
- 4 Détection de signaux bruités
- 5 Filtrage des signaux aléatoires
- 6 Estimation statistique
- 7 Estimation spectrale
- 8 Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Traitement des signaux aléatoires

- 1 Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle
- 2 Signaux aléatoires : représentation spectrale
- 3 Modèles de signaux aléatoires et bruits
- 4 Détection de signaux bruités
- 5 Filtrage des signaux aléatoires
- 6 Estimation statistique
- 7 Estimation spectrale
- 8 Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Traitement des signaux aléatoires

- 1 Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle
- 2 Signaux aléatoires : représentation spectrale
- 3 Modèles de signaux aléatoires et bruits
- 4 Détection de signaux bruités
- 5 Filtrage des signaux aléatoires
- 6 Estimation statistique
- 7 Estimation spectrale
- 8 Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Plan détaillé du cours I

① Signaux aléatoires : représentations statistique et temporelle

- ① Processus, fonctions et suites aléatoires
- ② Densités de probabilité d'ordre 1, 2, ..., N
- ③ Moments d'ordre 1 et 2 : moyenne, variance, fonction d'autocorrélation et d'autocovariance
- ④ Fonction d'intercorrélation et d'intercovariance
- ⑤ Moyennes statistiques, moyennes temporelles
- ⑥ Processus stationnaires
- ⑦ Processus ergodiques

② Signaux aléatoires : représentation spectrale

- ① Fonction d'autocorrélation : propriétés
- ② Densité spectrale de puissance
- ③ Interspectre, fonction de cohérence spectrale

Plan détaillé du cours II

③ Modèles de signaux aléatoires et de bruit

- ① Le bruit blanc
- ② Processus gaussiens
- ③ Processus de Poisson
- ④ Modélisation du bruit en physique
 - ① Bruit et mesure en physique
 - ② Bruit de Johnson
 - ③ Bruit de grenaille
 - ④ Bruit de scintillation
- ⑤ Rapport signal à bruit

④ Détection de signaux bruités

- ① Détection de signaux périodiques noyés dans le bruit
- ② Détection de signaux non périodiques : filtre adapté
- ③ Calcul de moyenne : réduction du bruit (signaux répétitifs)

5 Filtrage des signaux aléatoires

1 Filtrage des signaux aléatoires à temps continu

- 1 Rappels sur le filtrage linéaire continu
- 2 Formules de filtrage des signaux aléatoires continus

2 Filtrage des signaux aléatoires à temps discret

- 1 Rappels sur le filtrage linéaire discret
- 2 Formules de filtrage des signaux aléatoires discrets

3 Applications au traitement des signaux aléatoires

- 1 Identification d'un système linéaire
- 2 Analyse spectrale par filtrage passe-bande
- 3 Réduction de la variance du bruit par moyennage
- 4 Le filtre adapté
- 5 Le filtre de Wiener

Plan détaillé du cours IV

6 Estimation statistique

1 Définition et caractéristiques d'un estimateur

- 1 Biais, variance d'un estimateur
- 2 Estimateur efficace, estimateur consistant
- 3 Estimation au sens du maximum de vraisemblance

2 Estimateurs non paramétriques classiques

- 1 Estimateurs de la valeur moyenne
- 2 Estimateurs de la variance
- 3 Estimateurs de la fonction d'autocorrélation

7 Estimation spectrale

- 1 Introduction à l'estimation spectrale
- 2 Résolution spectrale et fenêtre d'observation
- 3 Le périodogramme
- 4 Le corrélogramme
- 5 Le périodogramme lissé
- 6 Le périodogramme moyenné

Annexe : Échantillonnage des signaux aléatoires

Références



J. MAX et col., *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, 2 tomes, Masson, Paris, 1985-1986 (nouvelle édition 1996).



M. et F. BIQUARD, *Signaux, systèmes linéaires et bruit en électronique*, Ellipses, Paris, 1992.



M. CHARBIT, *Éléments de théorie du signal : les signaux aléatoires*, Ellipses, Paris, 1990.



C. JUTTEN, *Théorie du signal*, cours (et formulaire) Polytech'Grenoble (Département 3i) disponibles en ligne, <http://www.gipsa-lab.grenoble-inp.fr/~christian.jutten/mescours/>



S.M. KAY, *Intuitive Probability and Random Processes using Matlab*, Springer, 2006. Mis à disposition par l'auteur : <http://www.ele.uri.edu/faculty/kay.html>



S.M. KAY, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : I. Estimation Theory*, Prentice Hall, 1993.



S.M. KAY, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : II. Detection Theory*, Prentice Hall, 1998.



S.M. KAY, *Modern Spectral Estimation : Theory and Application*, Prentice Hall, 1988.



T. O'HAVER, *A Pragmatic Introduction to Signal Processing with applications in scientific measurement*, and with free software to download : <http://terpconnect.umd.edu/~toh/spectrum/>

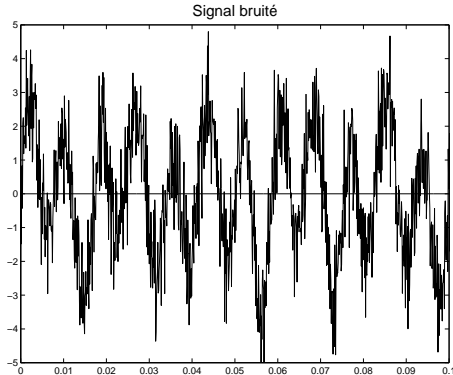


P. STOICA, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice Hall, 2005. Mis à disposition par l'auteur : <http://user.it.uu.se/~ps/SAS-new.pdf>



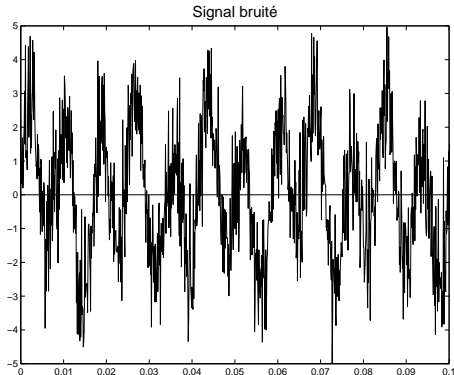
C.W. THERRIEN, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall, 1992.

Notion de signal aléatoire



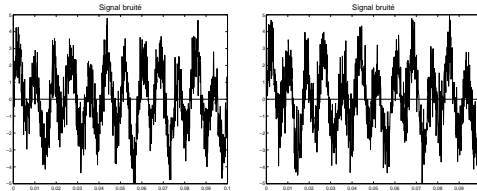
- En physique, certains phénomènes présentent un caractère imprévisible. **Lorsqu'on effectue ainsi deux fois une expérience (par exemple une mesure) dans les « mêmes » conditions, on observera des résultats différents.** De tels phénomènes seront dits **aléatoires**.

Notion de signal aléatoire



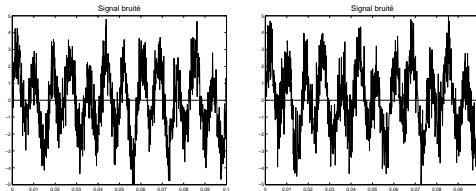
- En physique, certains phénomènes présentent un caractère imprévisible. **Lorsqu'on effectue ainsi deux fois une expérience (par exemple une mesure) dans les « mêmes » conditions, on observera des résultats différents.** De tels phénomènes seront dits **aléatoires**.

Notion de signal aléatoire



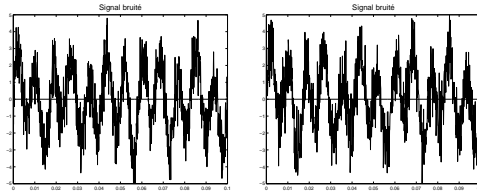
- Les signaux **aléatoires** sont ainsi des signaux qu'on ne peut prédire complètement avant de les avoir observés. Ils sont à opposer aux signaux **déterministes**, qui, moyennant la donnée d'un certain nombre de conditions initiales, sont parfaitement prévisibles.
- Les signaux aléatoires, comme les signaux déterministes peuvent servir de **support physique à l'information**.
- Un signal peut comporter une composante déterministe et une composante aléatoire.
- Pour extraire l'information utile de ces signaux, des techniques spécifiques de représentation et de traitement des signaux aléatoires ont été développées.

Notion de signal aléatoire



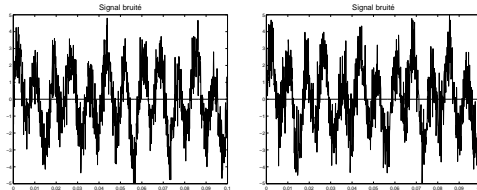
- Les signaux **aléatoires** sont ainsi des signaux qu'on ne peut prédire complètement avant de les avoir observés. Ils sont à opposer aux signaux **déterministes**, qui, moyennant la donnée d'un certain nombre de conditions initiales, sont parfaitement prévisibles.
- Les signaux aléatoires, comme les signaux déterministes peuvent servir de **support physique à l'information**.
- Un signal peut comporter une composante déterministe et une composante aléatoire.
- Pour extraire l'information utile de ces signaux, des techniques spécifiques de représentation et de traitement des signaux aléatoires ont été développées.

Notion de signal aléatoire



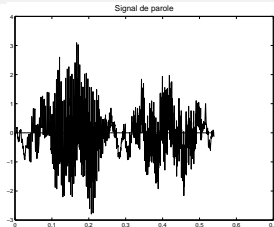
- Les signaux **aléatoires** sont ainsi des signaux qu'on ne peut prédire complètement avant de les avoir observés. Ils sont à opposer aux signaux **déterministes**, qui, moyennant la donnée d'un certain nombre de conditions initiales, sont parfaitement prévisibles.
- Les signaux aléatoires, comme les signaux déterministes peuvent servir de **support physique à l'information**.
- Un signal peut comporter une composante déterministe et une composante aléatoire.
- Pour extraire l'information utile de ces signaux, des techniques spécifiques de représentation et de traitement des signaux aléatoires ont été développées.

Notion de signal aléatoire



- Les signaux **aléatoires** sont ainsi des signaux qu'on ne peut prédire complètement avant de les avoir observés. Ils sont à opposer aux signaux **déterministes**, qui, moyennant la donnée d'un certain nombre de conditions initiales, sont parfaitement prévisibles.
- Les signaux aléatoires, comme les signaux déterministes peuvent servir de **support physique à l'information**.
- Un signal peut comporter une composante déterministe et une composante aléatoire.
- Pour extraire l'information utile de ces signaux, des techniques spécifiques de représentation et de traitement des signaux aléatoires ont été développées.

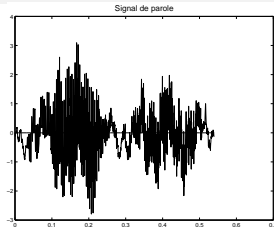
Signal aléatoire ou déterministe ?



Le caractère aléatoire d'un signal peut être lié à différentes situations :

- l'impossibilité fondamentale en physique moderne de décrire de façon complète, et avec une précision arbitraire certains signaux et systèmes (ex. : mécanique quantique) ;
- l'impossibilité de prendre en compte la multitude des phénomènes microscopiques sous-tendant le phénomène macroscopique observé ;
- le souhait dans certaines expériences, de ne pas décrire complètement le phénomène observé (pour des raisons de simplicité ou de compacité de la description). On peut alors parfois considérer la partie non modélisée comme aléatoire ;
- le bruit (variabilité) observé sur certaines classes de signaux déterministes, qui peut être identifié à une composante aléatoire (sinusoïde + bruit, etc.).

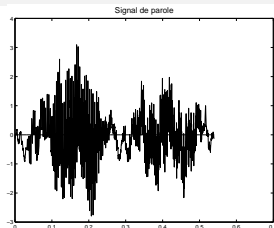
Signal aléatoire ou déterministe ?



Le caractère aléatoire d'un signal peut être lié à différentes situations :

- l'impossibilité fondamentale en physique moderne de décrire de façon complète, et avec une précision arbitraire certains signaux et systèmes (ex. : mécanique quantique) ;
- l'impossibilité de prendre en compte la multitude des phénomènes microscopiques sous-tendant le phénomène macroscopique observé ;
- le souhait dans certaines expériences, de ne pas décrire complètement le phénomène observé (pour des raisons de simplicité ou de compacité de la description). On peut alors parfois considérer la partie non modélisée comme aléatoire ;
- le bruit (variabilité) observé sur certaines classes de signaux déterministes, qui peut être identifié à une composante aléatoire (sinusoïde + bruit, etc.).

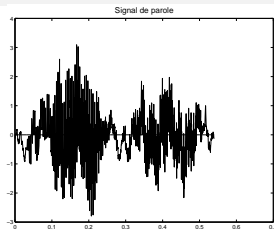
Signal aléatoire ou déterministe ?



Le caractère aléatoire d'un signal peut être lié à différentes situations :

- l'impossibilité fondamentale en physique moderne de décrire de façon complète, et avec une précision arbitraire certains signaux et systèmes (ex. : mécanique quantique) ;
- l'impossibilité de prendre en compte la multitude des phénomènes microscopiques sous-tendant le phénomène macroscopique observé ;
- le souhait dans certaines expériences, de ne pas décrire complètement le phénomène observé (pour des raisons de simplicité ou de compacité de la description). On peut alors parfois considérer la partie non modélisée comme aléatoire ;
- le bruit (variabilité) observé sur certaines classes de signaux déterministes, qui peut être identifié à une composante aléatoire (sinusoïde + bruit, etc.).

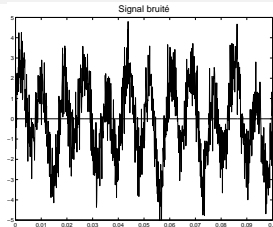
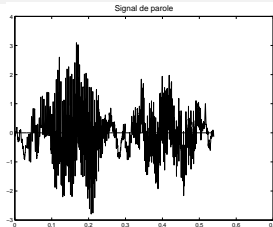
Signal aléatoire ou déterministe ?



Le caractère aléatoire d'un signal peut être lié à différentes situations :

- l'impossibilité fondamentale en physique moderne de décrire de façon complète, et avec une précision arbitraire certains signaux et systèmes (ex. : mécanique quantique) ;
- l'impossibilité de prendre en compte la multitude des phénomènes microscopiques sous-tendant le phénomène macroscopique observé ;
- le souhait dans certaines expériences, de ne pas décrire complètement le phénomène observé (pour des raisons de simplicité ou de compacité de la description). On peut alors parfois considérer la partie non modélisée comme aléatoire ;
- le bruit (variabilité) observé sur certaines classes de signaux déterministes, qui peut être identifié à une composante aléatoire (sinusoïde + bruit, etc.).

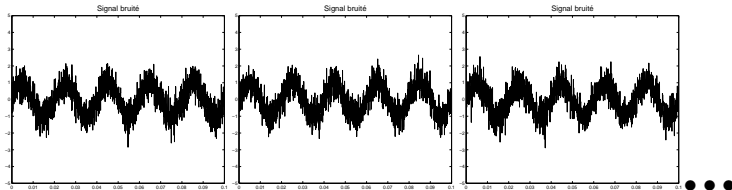
Exemple de signaux aléatoires



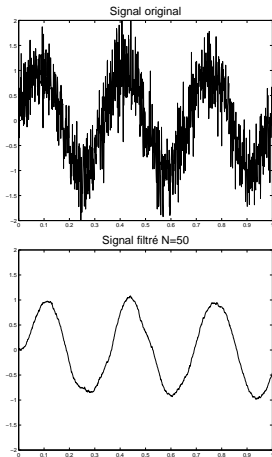
Exemples :

- bruits en électronique (thermiques, de grenaille, etc.) ;
- signal électrique produit par un compteur Geiger ;
- fluctuations observées dans les résultats de la mesure d'un paramètre physique ;
- signaux de parole (variabilité intra et inter-locuteur) ;
- signaux biologiques : EEG, ECG, ...

Notion de signal aléatoire



- **A retenir :** Un signal sera dit *aléatoire* si, lorsqu'on effectue N fois l'expérience dans les mêmes conditions, on observe N résultats différents ($=N$ réalisations d'un même signal aléatoire).

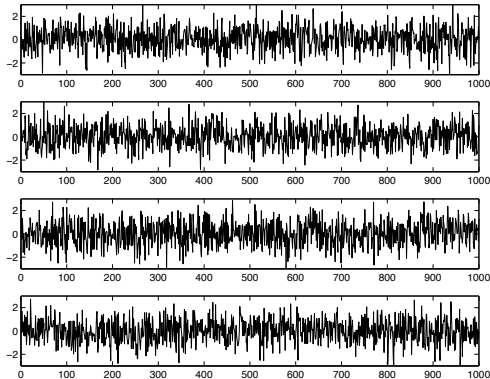


TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES

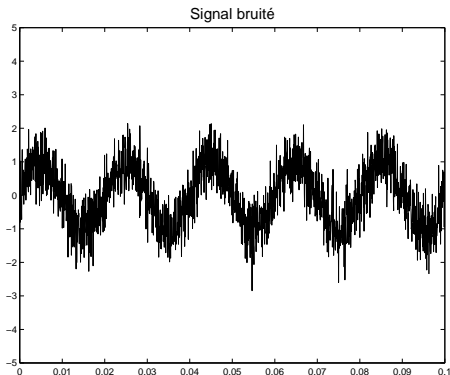
Partie I

Partie 1

SIGNAUX ALÉATOIRES : REPRÉSENTATIONS STATISTIQUE ET TEMPORELLE

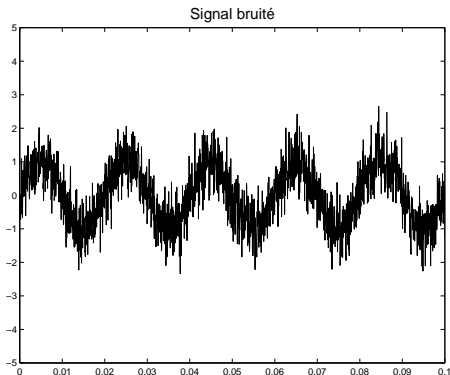


Notion de signal aléatoire



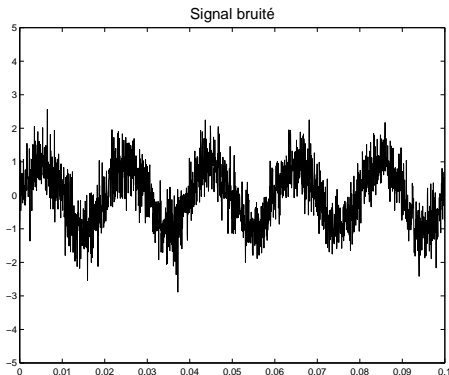
- Lorsqu'on effectue N fois l'expérience dans les « mêmes » conditions, on observe N signaux différents. On obtient N réalisations d'un même signal aléatoire.

Notion de signal aléatoire



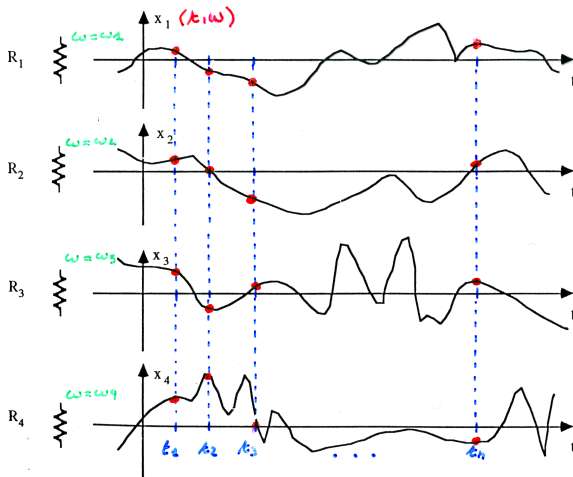
- Lorsqu'on effectue N fois l'expérience dans les « mêmes » conditions, on observe N signaux différents. On obtient N réalisations d'un même signal aléatoire.

Notion de signal aléatoire



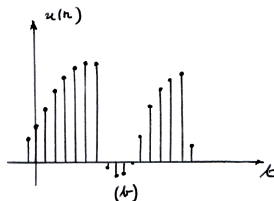
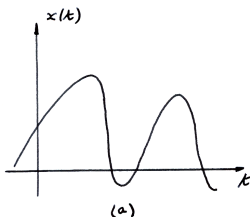
- Lorsqu'on effectue N fois l'expérience dans les « mêmes » conditions, on observe N signaux différents. On obtient N réalisations d'un même signal aléatoire.

Notion de signal aléatoire



Tension aléatoire aux bornes d'une résistance (bruit thermique), 4 réalisations
(d'après M. et F. Biquard, Signaux, systèmes linéaires et bruit en électronique, Ellipses, 1992)

Représentation des signaux aléatoires



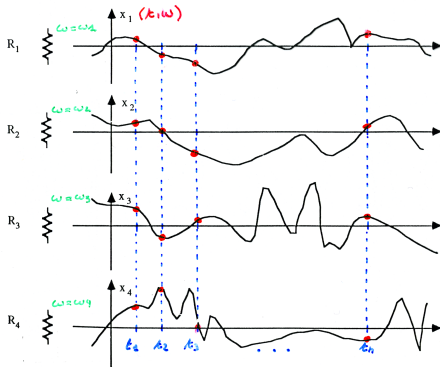
Signal déterministe à temps continu (a) et à temps discret (b)

Les signaux déterministes à temps continu sont représentés par des fonctions (ou des distributions), les signaux déterministes à temps discret par des suites numériques.

La représentation des signaux aléatoires passe par la notion de processus aléatoire (ou processus stochastique) :

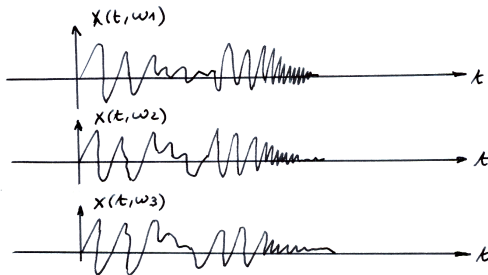
- processus aléatoires à temps continu (ou fonctions aléatoires) ;
- processus aléatoires à temps discrets (ou suites aléatoires).

Expérience statistique et probabilités



- Expérience aléatoire : expérience dont l'issue, le résultat n'est pas prévisible.
- Espace des épreuves Ω : ensemble de tous les résultats possibles ω .
- ω : épreuve ou événement élémentaire. Une épreuve ω correspond ici à une réalisation particulière du signal.
- Événement E : un sous-ensemble de Ω , un ensemble d'épreuves.
- $P(E)$: probabilité de l'événement E .

Processus, fonctions et suites aléatoires

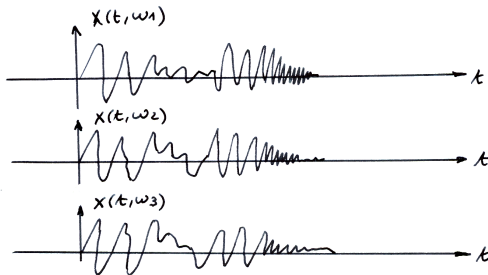


Signal aléatoire à temps continu (3 réalisations)

Le caractère aléatoire d'un signal X est représenté en introduisant une dépendance du signal par rapport au résultat ω de l'expérience aléatoire :

- Signal aléatoire à temps continu : $X(t, \omega)$ fonction aléatoire
- Signal aléatoire à temps discret : $X(n, \omega)$ suite aléatoire

Processus, fonctions et suites aléatoires

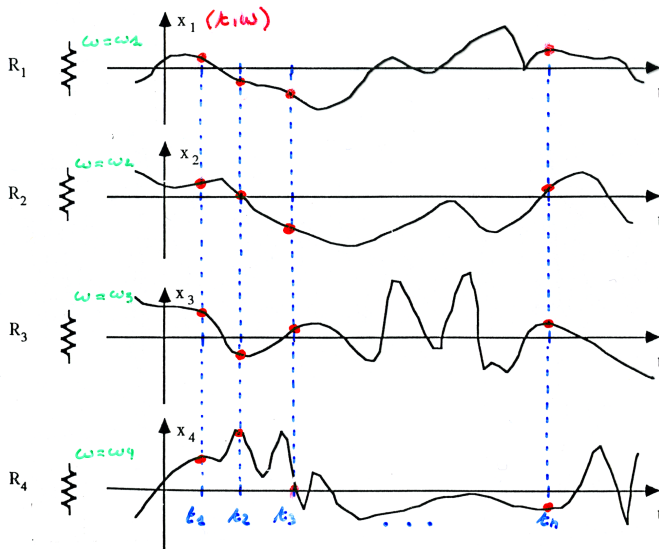


Signal aléatoire à temps continu (3 réalisations)

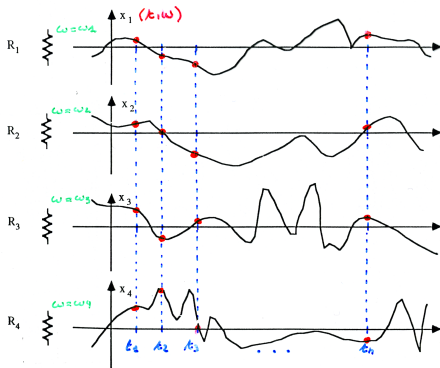
Le caractère aléatoire d'un signal X est représenté en introduisant une dépendance du signal par rapport au résultat ω de l'expérience aléatoire :

- Signal aléatoire à temps continu : $X(t, \omega)$ fonction aléatoire
- Signal aléatoire à temps discret : $X(n, \omega)$ suite aléatoire

Processus, fonctions et suites aléatoires

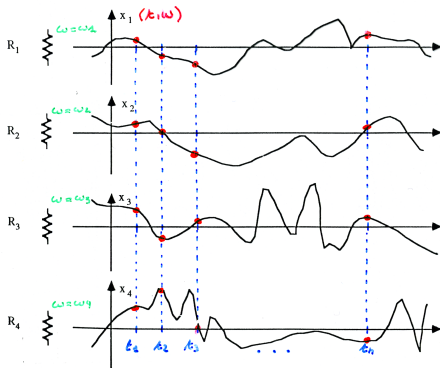


Processus aléatoire : variables t et ω



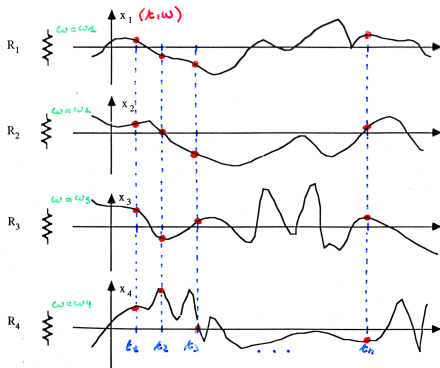
- Si on fixe $\omega = \omega_i$, on a une **fonction du temps** $t : X(t, \omega_i)$ (appelé réalisation du processus aléatoire) ;
- Si on fixe le temps $t = t_j$, on a une **variable aléatoire**, dont la valeur est fonction de $\omega : X(t_j, \omega)$.
- Si on fixe $\omega = \omega_i$ et $t = t_j$, on a la valeur $X(t_j, \omega_i)$ du processus à l'instant t_j pour l'épreuve ω_i .

Processus aléatoire : variables t et ω



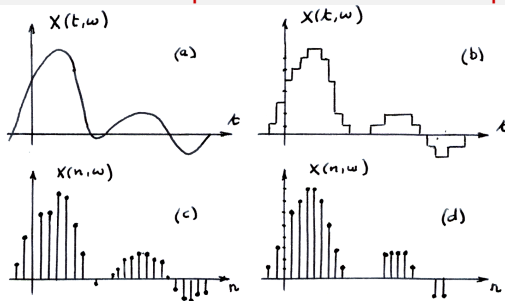
- Si on fixe $\omega = \omega_i$, on a une **fonction du temps** $t : X(t, \omega_i)$ (appelé réalisation du processus aléatoire) ;
- Si on fixe le temps $t = t_j$, on a une **variable aléatoire**, dont la valeur est fonction de $\omega : X(t_j, \omega)$.
- Si on fixe $\omega = \omega_i$ et $t = t_j$, on a la **valeur** $X(t_j, \omega_i)$ du processus à l'instant t_j pour l'épreuve ω_i .

Processus aléatoire : variables t et ω



- Si on fixe $\omega = \omega_i$, on a une **fonction du temps** $t : X(t, \omega_i)$ (appelé réalisation du processus aléatoire) ;
- Si on fixe le temps $t = t_j$, on a une **variable aléatoire**, dont la valeur est fonction de $\omega : X(t_j, \omega)$.
- Si on fixe $\omega = \omega_i$ et $t = t_j$, on a la **valeur** $X(t_j, \omega_i)$ du processus à l'instant t_j pour l'épreuve ω_i .

Processus aléatoires à temps continu et à temps discret

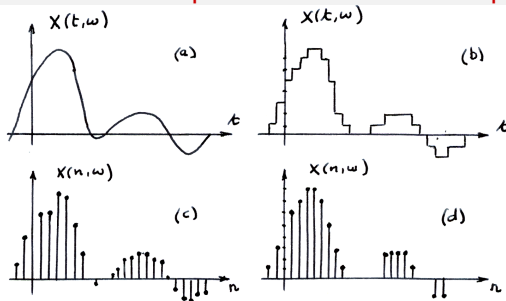


- (a) processus à temps continu et à valeurs continues $X(t, \omega)$: **analogique**
- (b) processus à temps continu et à valeurs discrètes $X(t, \omega)$: **quantifié**
- (c) processus à temps discret et à valeurs continues $X(n, \omega)$: **échantillonné**
- (d) processus à temps discret et à valeurs discrètes $X(n, \omega)$: **numérique**

- Processus aléatoire à temps continu : $X(t, \omega)$ \rightarrow « fonction aléatoire »
- Processus aléatoire à temps discret : $X(n, \omega)$ \rightarrow « suite aléatoire »

Notations simplifiées : $X(t, \omega) \rightarrow X(t)$ ou $X(n, \omega) \rightarrow X(n)$.

Processus aléatoires à temps continu et à temps discret

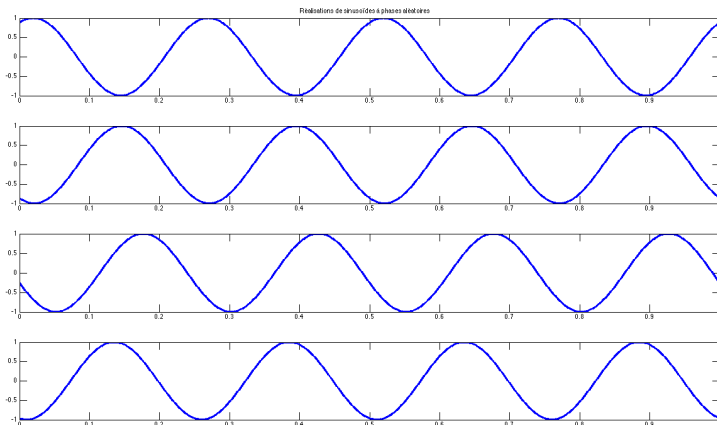


- (a) processus à temps continu et à valeurs continues $X(t, \omega)$: **analogique**
- (b) processus à temps continu et à valeurs discrètes $X(t, \omega)$: **quantifié**
- (c) processus à temps discret et à valeurs continues $X(n, \omega)$: **échantillonné**
- (d) processus à temps discret et à valeurs discrètes $X(n, \omega)$: **numérique**

- Processus aléatoire à temps continu : $X(t, \omega)$ \rightarrow « fonction aléatoire »
- Processus aléatoire à temps discret : $X(n, \omega)$ \rightarrow « suite aléatoire »

Notations simplifiées : $X(t, \omega) \rightarrow X(t)$ ou $X(n, \omega) \rightarrow X(n)$.

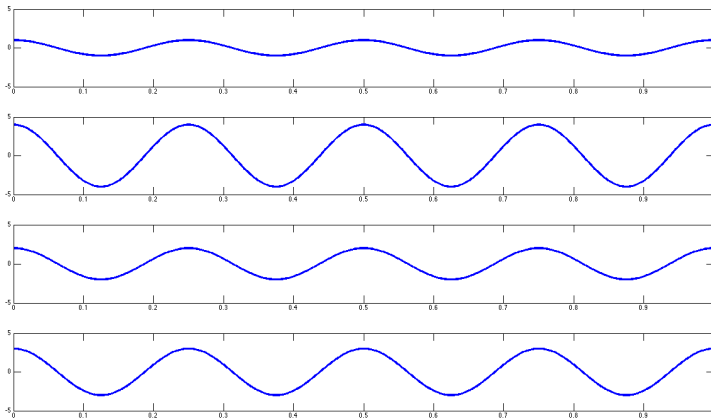
Exemple de signal aléatoire



Sinusoïde à phase aléatoire, 4 réalisations

$$X(t, \omega) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi(\omega)) \text{ où } \Phi(\omega) \text{ est équirépartie sur } [0, 2\pi]$$

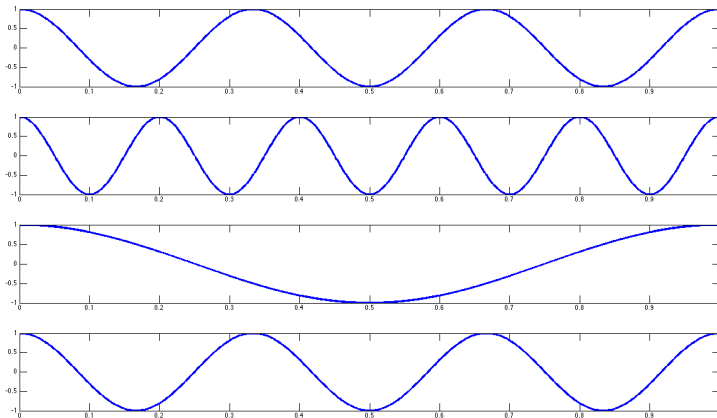
Exemple de signal aléatoire



Sinusoïde à amplitude aléatoire, 4 réalisations

$$X(t, \omega) = A(\omega) \cos(2\pi f_0 t + \Phi) \text{ où } A(\omega) \text{ est équirépartie sur } [1, 4]$$

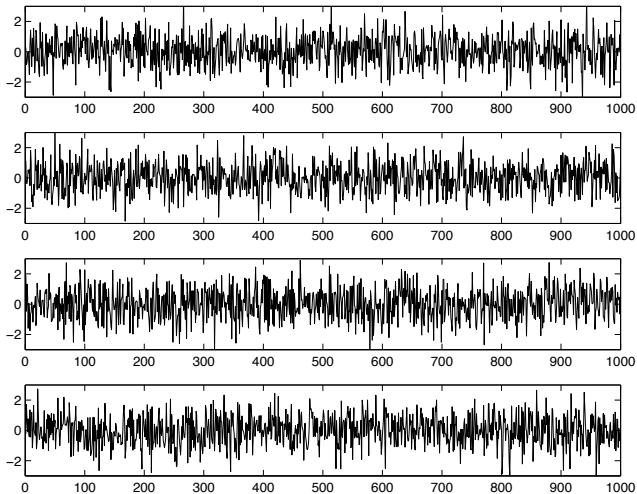
Exemple de signal aléatoire



Sinusoïde à fréquence aléatoire, 4 réalisations

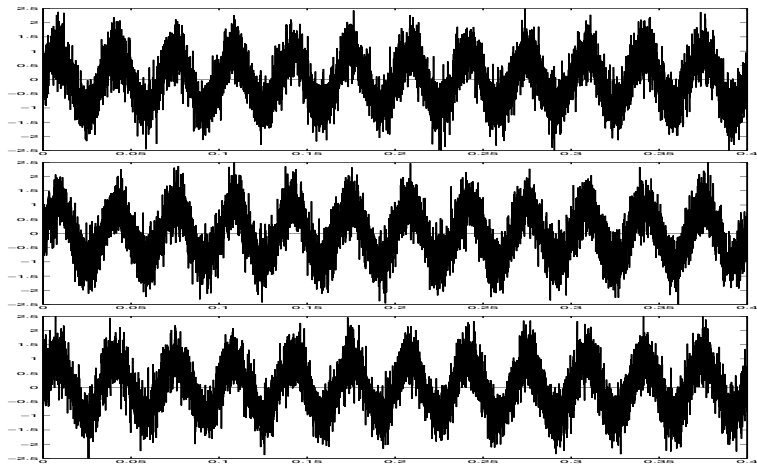
$$X(t, \omega) = A \cos(2\pi F_0(\omega)t + \Phi) \text{ où } F_0(\omega) \text{ est équirépartie sur } [1, 5]$$

Exemple de processus aléatoire



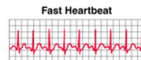
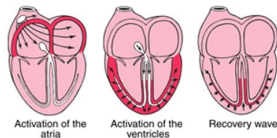
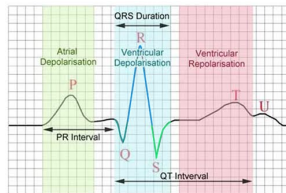
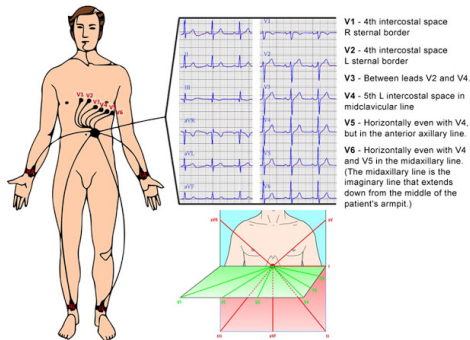
Bruit blanc gaussien, 4 réalisations

Exemple de signal aléatoire



Sinusoïde bruitée (3 réalisations)

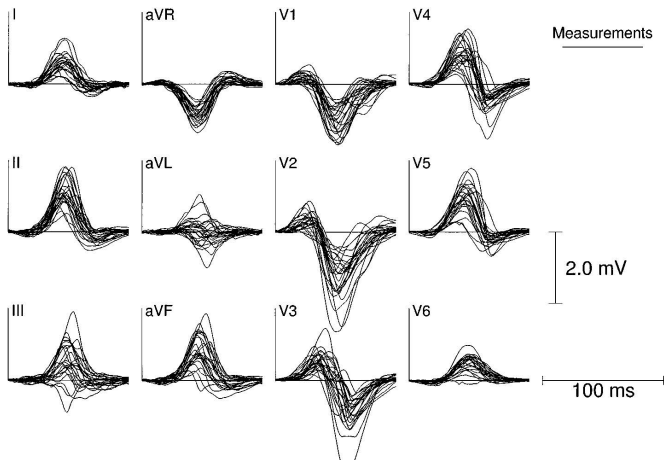
Exemple de signal aléatoire



Electrocardiogramme (ECG)

source : <http://www.ivline.org/2010/05/quick-guide-to-ecg.html>

Exemple de signal aléatoire

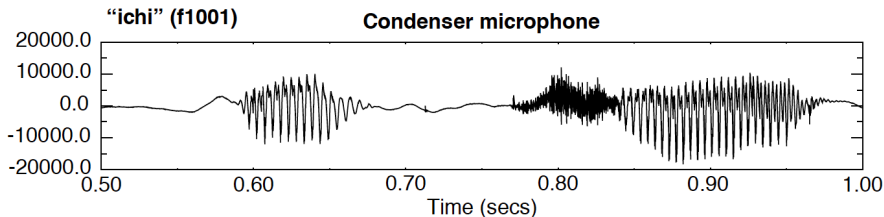
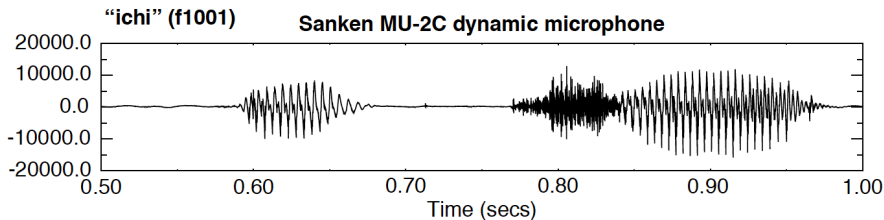


Variabilité interindividuelle du signal ECG (25 sujets)

R. Hoekema, G. Uijen, and A. van Oosterom, Geometrical Aspect of the Interindividual Variability of Multilead ECG Recordings,

IEEE Trans. Biomedical Eng., vol. 48, no. 5, pp. 551-559, May 2001

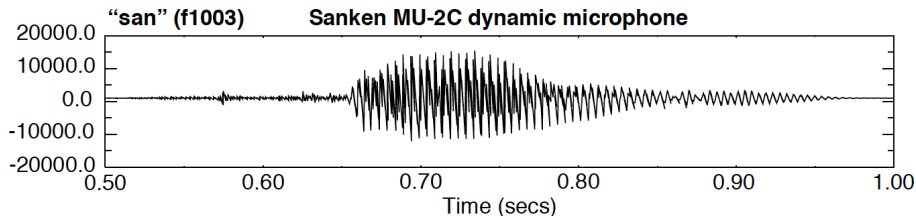
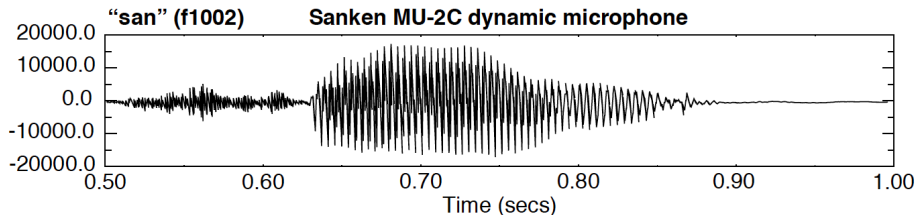
Exemple de signal aléatoire



Variabilité du signal de parole : enregistrement simultané avec deux microphones

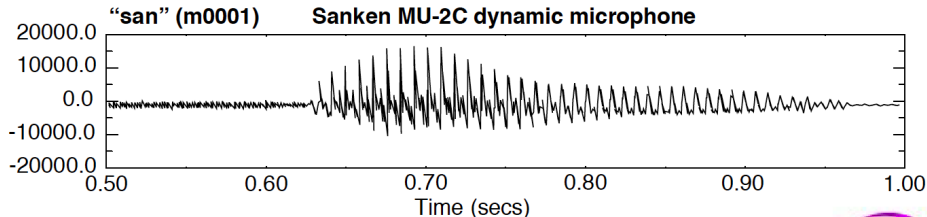
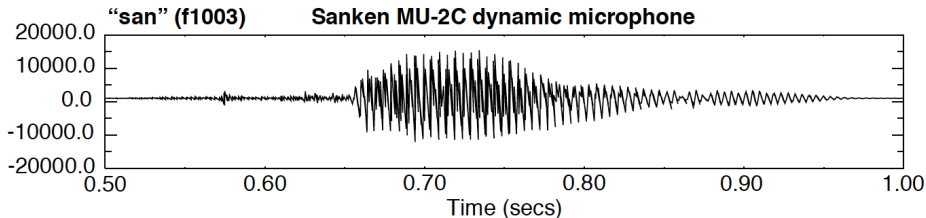
J. Picone, , Fundamentals of Speech Recognition, Mississippi State University

Exemple de signal aléatoire



Variabilité intralocuteur du signal de parole : même locuteur, même micro, deux enregistrements

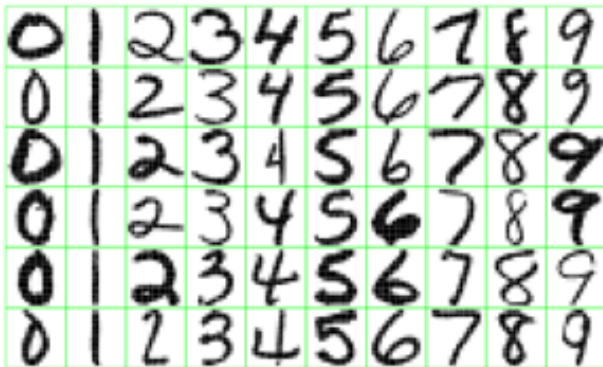
Exemple de signal aléatoire



Variabilité interlocuteur du signal de parole : deux locuteurs, même micro

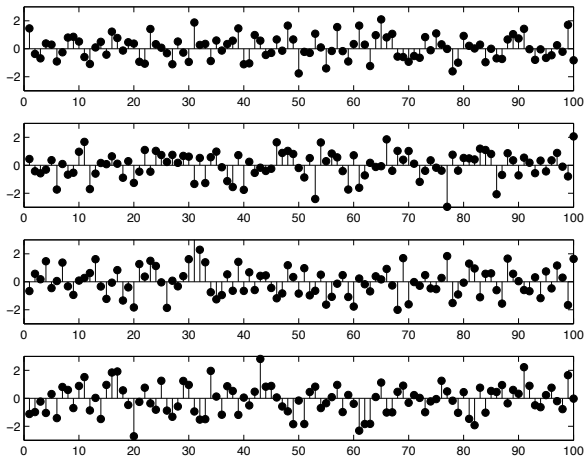
J. Picone, , Fundamentals of Speech Recognition, Mississippi State University

Exemple de signal aléatoire



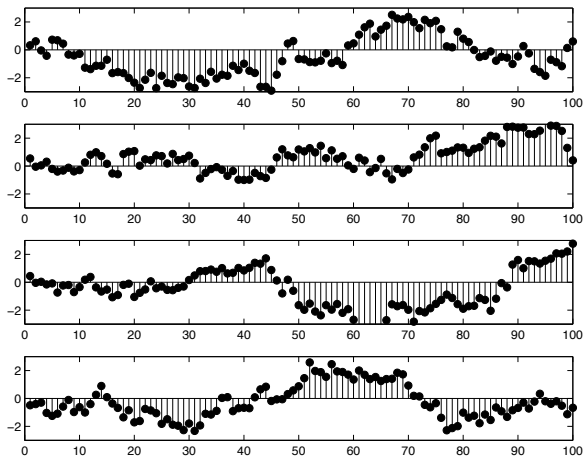
Variabilité de l'écriture manuscrite : chiffres (16x16 pixels)
(*USA Postal Service Zip Code Database*)

Exemple de processus aléatoire



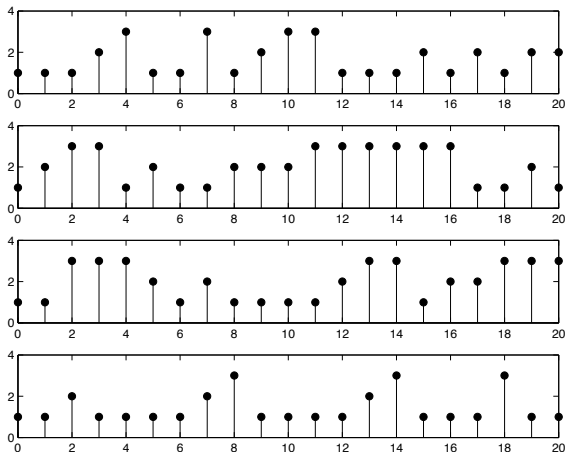
Bruit blanc gaussien discret (échantillons décorrélés), 4 réalisations

Exemple de processus aléatoire



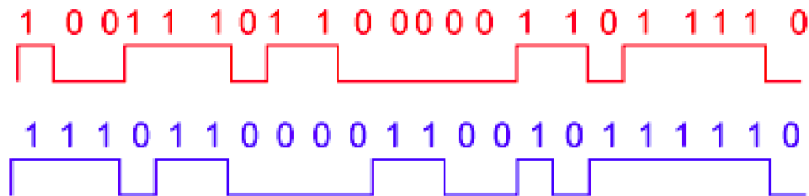
Processus gaussien corrélé (éch. corrélés, AR d'ordre 1, $a=0,9$), 4 réalisations

Exemple de signal aléatoire



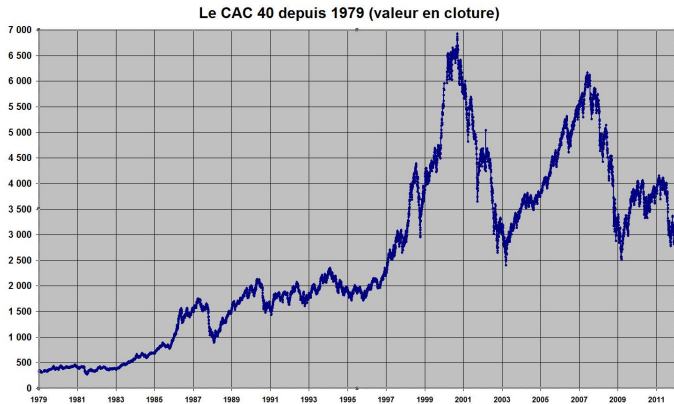
Chaîne de Markov à trois états, 4 réalisations

Exemple de signal aléatoire



Signaux de communication binaire

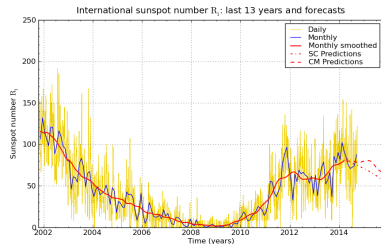
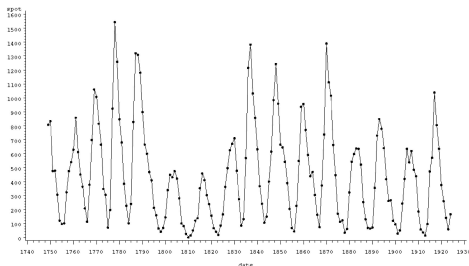
Exemple de signal aléatoire



Données financières : cours du CAC 40

(source : Wikipedia, «CAC 40 1979-2011» par Touchatou - Travail personnel. Creative Commons.)

Exemple de signal aléatoire

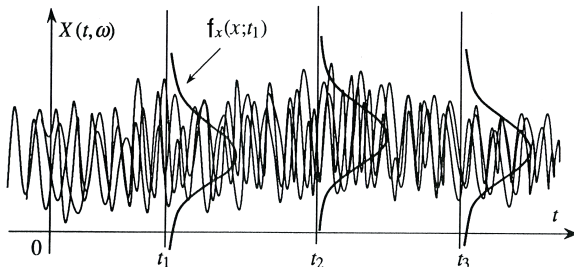


SILSO graphics (<http://sidc.be>) Royal Observatory of Belgium 01/10/2014

Processus aléatoire : nombre de tâches solaires (cycle de 11 ans).

(source : Sunspot Index and Long-term Solar Observations <http://www.sidc.be/silso/>)

Processus aléatoires : densités d'ordre 1



Densités d'ordre 1 aux points : t_1 , t_2 , t_3

(D'après M. Charbit, les signaux aléatoires, Ellipses, 1990)

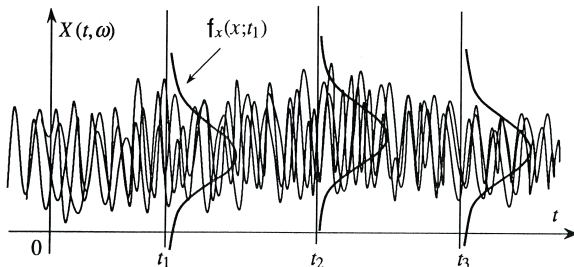
On considère les valeurs prises par le processus aléatoire à **un instant fixé** t_i : $X(t_i)$.

La densité de probabilité **d'ordre 1** à l'instant t_i , notée $f_X(x ; t_i)$ correspond à la distribution des valeurs de la variable aléatoire à cet instant.

Interprétation ($\Delta x \rightarrow 0$) :

$$f_X(x ; t_i) \simeq \frac{P(x \leq X(t_i) < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Processus aléatoires : densités d'ordre 1



Densités d'ordre 1 aux points : t_1 , t_2 , t_3

(D'après M. Charbit, les signaux aléatoires, Ellipses, 1990)

On considère les valeurs prises par le processus aléatoire à **un instant fixé** t_i : $X(t_i)$.

La densité de probabilité **d'ordre 1** à l'instant t_i , notée $f_X(x ; t_i)$ correspond à la distribution des valeurs de la variable aléatoire à cet instant.

Interprétation ($\Delta x \rightarrow 0$) :

$$f_X(x ; t_i) \simeq \frac{P(x \leq X(t_i) < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Exemple : bruit thermique (à temps continu)

Enregistrement d'une séquence de bruit

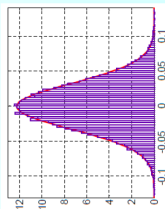


Figure 4 : Histogramme des tensions de bruit : $R = 3,3 \text{ k}\Omega$, $T = 26,9^\circ\text{C}$. La courbe rouge est la densité de probabilité de la loi normale décrivant le mieux les résultats de mesure

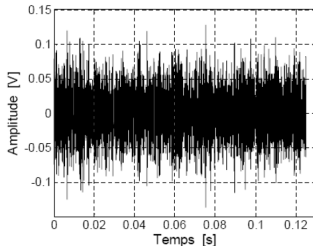


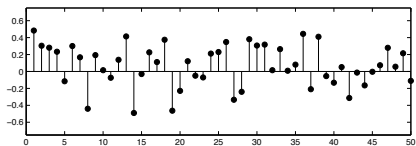
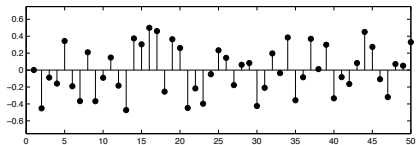
Figure 3 : Séquence de bruit en sortie de l'AOP4, $R = 3,3 \text{ k}\Omega$, $T = 26,9^\circ\text{C}$, $F_c = 240 \text{ kHz}$, $N = 30000$

Mesure de la densité d'ordre 1 d'un bruit thermique

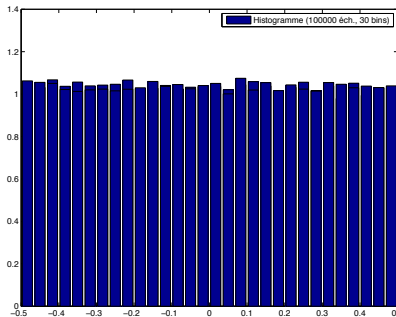
d'après G. Couturier GEII-IUT Bordeaux1, Bruit en électronique

Le bruit thermique a une densité (d'ordre 1) $f_X(x; t)$ gaussienne pour tout t .

Exemple : bruit blanc discret uniforme $\mathcal{U}[-0.5, 0.5]$



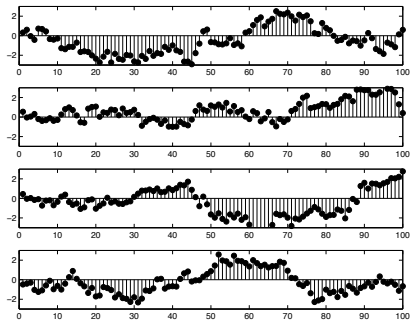
(a)



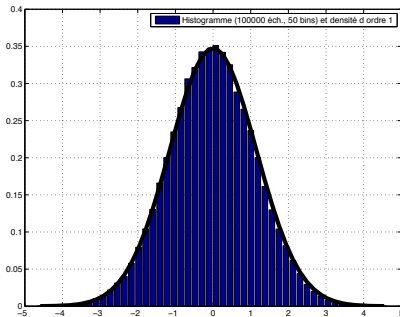
(b)

(a) 2 réalisations (50 éch.) et (b) densité d'ordre 1 approchée par histogramme

Exemple : processus gaussien discret



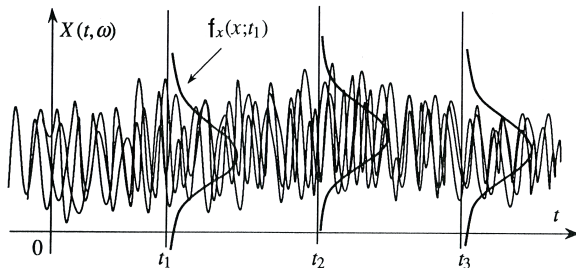
(a)



(b)

(a) 4 réalisations (100 éch.) et (b) histogramme / densité d'ordre 1 théorique

Processus aléatoires : densités d'ordre 2

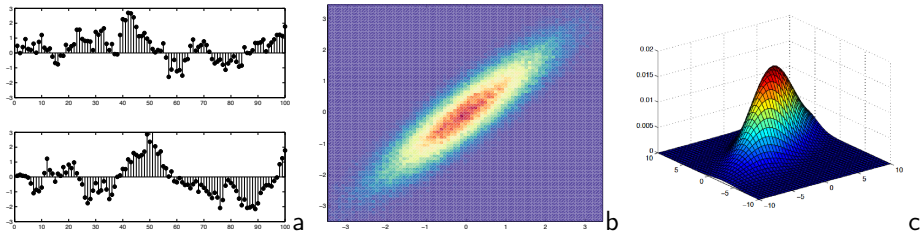


(D'après M. Charbit, les signaux aléatoires, Ellipses, 1990)

On considère le couple des valeurs prises par le processus aléatoire à **deux** instants t_i et t_j : $(X(t_i), X(t_j))$. La densité de probabilité **d'ordre 2**, notée $f_{X(t_i), X(t_j)}(x_i, x_j ; t_i, t_j)$, correspond à la distribution conjointe des valeurs de ce couple :

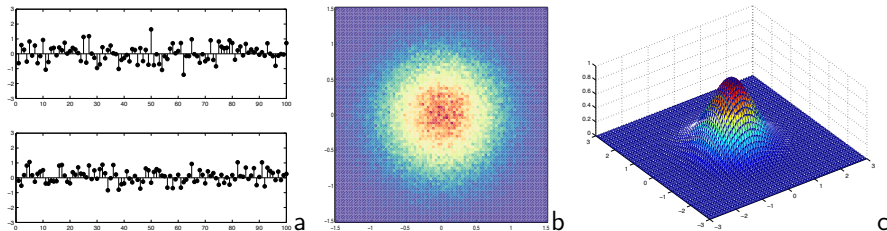
$$f_{X(t_i), X(t_j)}(x_i, x_j ; t_i, t_j) \simeq \frac{P(x_i \leq X(t_i) < x_i + \Delta x_i, x_j \leq X(t_j) < x_j + \Delta x_j)}{\Delta x_i \Delta x_j}$$

Exemple : densité d'ordre 2 d'un processus gaussien corrélé



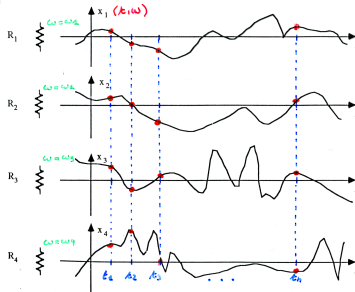
- (a) 2 réalisations d'un processus gaussien corrélé.
(b) Histogram. conjoint (2D) des valeurs du signal à deux instants consécutifs : $(X(n), X(n+1))$.
(c) Densité d'ordre 2 théorique correspondante : $f_{X(n), X(n+1)}$ = gaussienne bidimensionnelle

Exemple : densité d'ordre 2 d'un processus gaussien non corrélé (bruit blanc)



- (a) 2 réalisations d'un processus gaussien non corrélé.
(b) Histogram. conjoint (2D) des valeurs du signal à deux instants consécutifs : $(X(n), X(n+1))$.
(c) Densité d'ordre 2 théorique correspondante : $f_{X(n), X(n+1)}$ = gaussienne bidimensionnelle

Processus aléatoires : densités d'ordre n



Théorème : Un processus aléatoire est entièrement décrit par ses densités de probabilité (conjointes) d'ordre n :

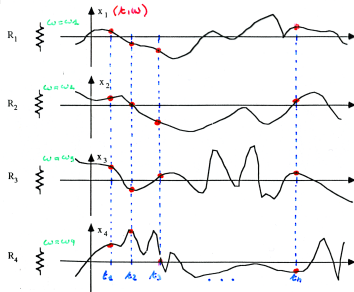
$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Cette densité représente la façon dont les valeurs du processus se distribuent aux n instants t_1, t_2, \dots, t_n .
Interprétation ($\Delta x_i \rightarrow 0$) :

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n) \simeq \frac{P(x_1 \leq X(t_1) < x_1 + \Delta x_1 ; \dots ; x_n \leq X(t_n) < x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n}$$

En général ces densités ne sont pas connues $\forall t_i$ et $\forall n$. On se contente souvent des densités d'ordre 1 et 2 et des moments associés.

Processus aléatoires : densités d'ordre n



Théorème : Un processus aléatoire est entièrement décrit par ses densités de probabilité (conjointes) d'ordre n :

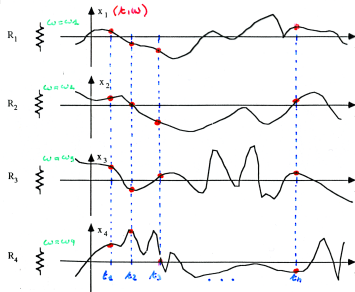
$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Cette densité représente la façon dont les valeurs du processus se distribuent aux n instants t_1, t_2, \dots, t_n .
Interprétation ($\Delta x_i \rightarrow 0$) :

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n) \simeq \frac{P(x_1 \leq X(t_1) < x_1 + \Delta x_1 ; \dots ; x_n \leq X(t_n) < x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n}$$

En général ces densités ne sont pas connues $\forall t_i$ et $\forall n$. On se contente souvent des densités d'ordre 1 et 2 et des moments associés.

Processus aléatoires : densités d'ordre n



Théorème : Un processus aléatoire est entièrement décrit par ses densités de probabilité (conjointes) d'ordre n :

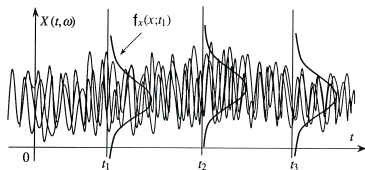
$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Cette densité représente la façon dont les valeurs du processus se distribuent aux n instants t_1, t_2, \dots, t_n .
Interprétation ($\Delta x_i \rightarrow 0$) :

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n) \simeq \frac{P(x_1 \leq X(t_1) < x_1 + \Delta x_1 ; \dots ; x_n \leq X(t_n) < x_n + \Delta x_n)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n}$$

En général ces densités ne sont pas connues $\forall t_i$ et $\forall n$. On se contente souvent des densités d'ordre 1 et 2 et des moments associés.

Valeur moyenne statistique, variance



En général on ne connaît pas les densités conjointes d'ordre n . On se contente souvent des densités d'ordre 1 et 2, voire des moments d'ordre 1 et 2 qui se calculent à partir de ces densités.

- Moment d'ordre 1 : valeur moyenne statistique (t fixé) :

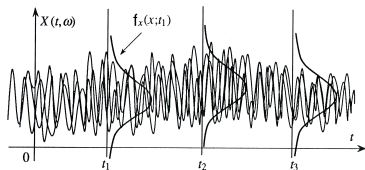
$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx$$

Processus aléatoire centré : $m_X(t) = 0$

- Moment d'ordre 2 : variance (t fixé) :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t) &= \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X(t))^2 f_{X(t)}(x; t) dx \end{aligned}$$

Valeur moyenne statistique, variance



En général on ne connaît pas les densités conjointes d'ordre n . On se contente souvent des densités d'ordre 1 et 2, voire des moments d'ordre 1 et 2 qui se calculent à partir de ces densités.

- Moment d'ordre 1 : valeur moyenne statistique (t fixé) :

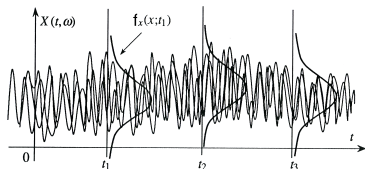
$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx$$

Processus aléatoire centré : $m_X(t) = 0$

- Moment d'ordre 2 : variance (t fixé) :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t) &= \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X(t))^2 f_{X(t)}(x; t) dx \end{aligned}$$

Valeur moyenne statistique, variance



En général on ne connaît pas les densités conjointes d'ordre n . On se contente souvent des densités d'ordre 1 et 2, voire des moments d'ordre 1 et 2 qui se calculent à partir de ces densités.

- Moment d'ordre 1 : valeur moyenne statistique (t fixé) :

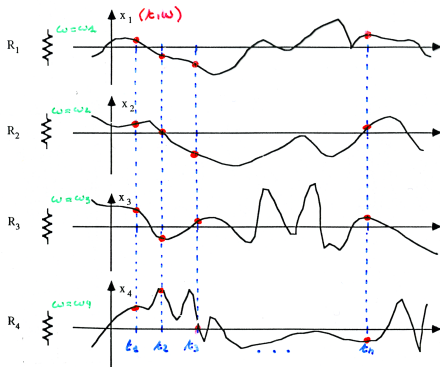
$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx$$

Processus aléatoire centré : $m_X(t) = 0$

- Moment d'ordre 2 : variance (t fixé) :

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t) &= \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X(t))^2 f_{X(t)}(x; t) dx \end{aligned}$$

Moyenne statistique : interprétation

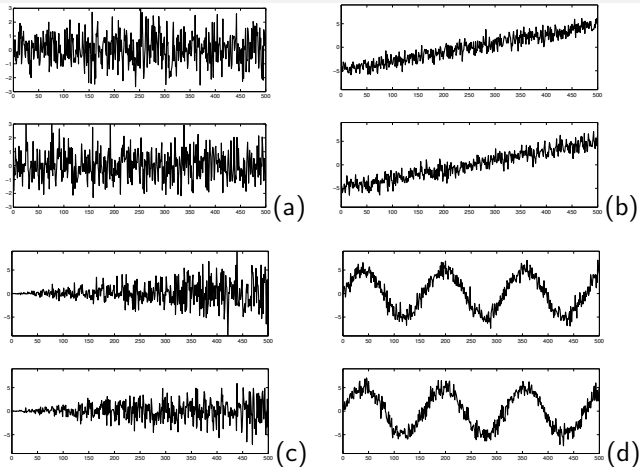


- Moyenne statistique (à t fixé!) :

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{somme}} \underbrace{x}_{\text{valeurs prises par } X(t)} \cdot \underbrace{f_X(t)(x; t) dx}_{\text{« probabilité élémentaire » d'avoir } X(t) = x}$$

C'est la moyenne des valeurs que prend le processus $X(t)$ à un instant t fixé, sur un très grand nombre de réalisations.

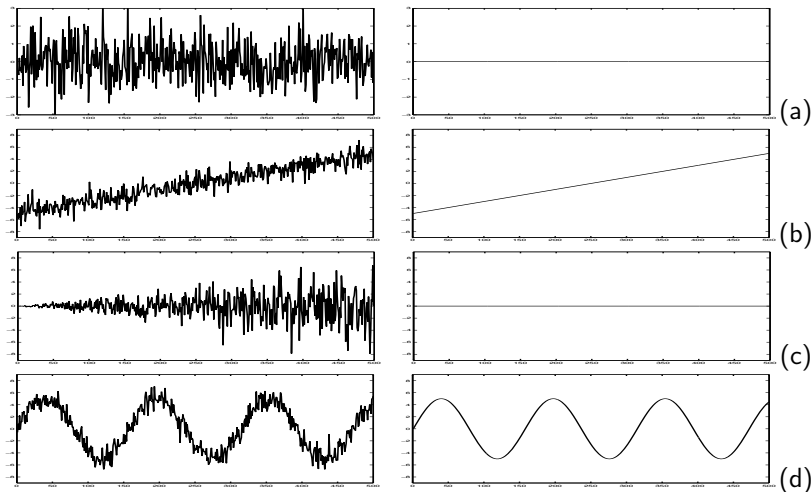
Exemple : moyenne statistique, variance



Signaux aléatoires : 2 réalisations (a) : moyenne statistique constante = 0 ; (b) moyenne statistique croissante (linéairement) ; (c) moyenne constante, variance croissante et (d) : moyenne statistique variant sinusoïdalement, variance constante

Ne pas confondre moyenne statistique et temporelle !

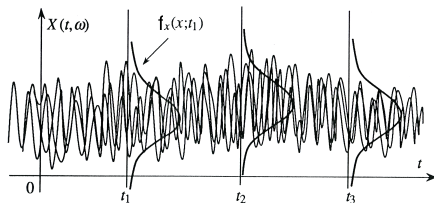
Exemple : moyenne statistique, variance



Signaux aléatoires : 1 réalisation (à gauche) et moyenne statistique correspondante $m_X(t)$ (à droite)

(a) : moyenne statistique constante = 0 ; (b) moyenne statistique croissante (linéairement) ; (c) moyenne constante, variance croissante et (d) : moyenne statistique variant sinusoïdalement, variance constante

Fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance



(D'après M. Charbit, les signaux aléatoires, Ellipses, 1990)

- Moments d'ordre 2 : fonction d'autocorrélation statistique ((t_1, t_2) fixé) :

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2 ; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

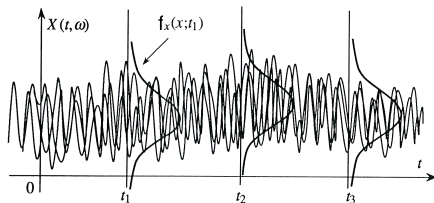
- Fonction d'autocovariance statistique :

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)])(X(t_2) - \mathbb{E}[X(t_2)])] \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \end{aligned}$$

- Moments statistiques d'ordre $n > 2$ (rarement utilisés) :

$$R_X(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)]$$

Fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance



(D'après M. Charbit, les signaux aléatoires, Ellipses, 1990)

- Moments d'ordre 2 : fonction d'autocorrélation statistique ((t_1, t_2) fixé) :

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2 ; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

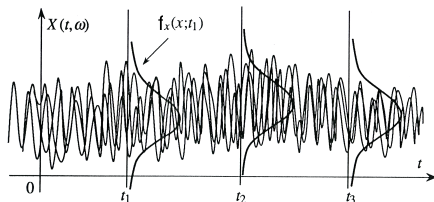
- Fonction d'autocovariance statistique :

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)])(X(t_2) - \mathbb{E}[X(t_2)])] \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \end{aligned}$$

- Moments statistiques d'ordre $n > 2$ (rarement utilisés) :

$$R_X(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2) \dots X(t_n)]$$

Fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance



(D'après M. Charbit, les signaux aléatoires, Ellipses, 1990)

- Moments d'ordre 2 : fonction d'autocorrélation statistique ((t_1, t_2) fixé) :

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2 ; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

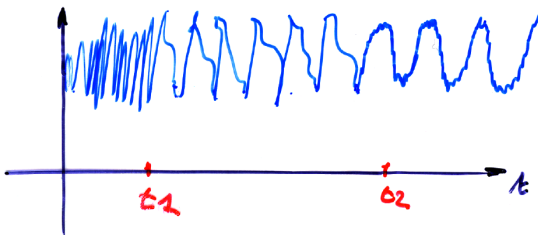
- Fonction d'autocovariance statistique :

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)])(X(t_2) - \mathbb{E}[X(t_2)])] \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \end{aligned}$$

- Moments statistiques d'ordre $n > 2$ (rarement utilisés) :

$$R_X(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2) \dots X(t_n)]$$

Fonction d'autocorrélation statistique : interprétation

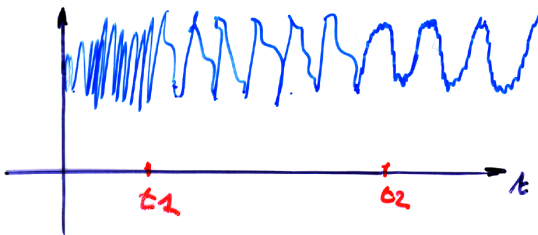


Signal aléatoire $X(t, \omega)$: quelle est la relation statistique entre $X(t_1, \omega)$ et $X(t_2, \omega)$?

Les fonctions d'autocorrélation statistique $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$
et d'autocovariance $C_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)])(X(t_2) - \mathbb{E}[X(t_2)])]$
mesurent la corrélation (statistique) entre les valeurs prises par le processus aux instants t_1 et t_2 .

- ▷ forte corrélation : relation linéaire entre les variables aléatoires $X(t_2)$ et $X(t_1)$
- ▷ faible corrélation : pas de relation entre les variables aléatoires $X(t_2)$ et $X(t_1)$ ou relation non linéaire (sans tendance linéaire)

Fonction d'autocorrélation statistique : interprétation

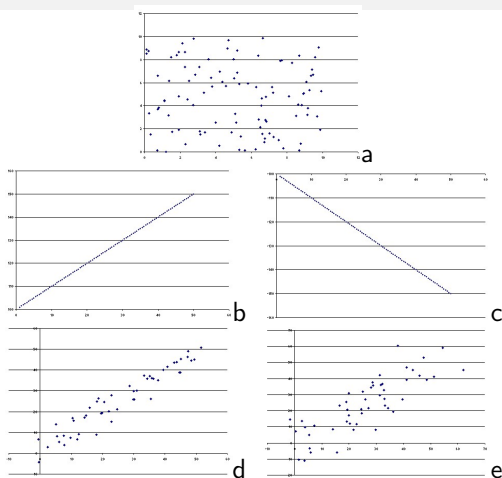


Signal aléatoire $X(t, \omega)$: quelle est la relation statistique entre $X(t_1, \omega)$ et $X(t_2, \omega)$?

Les fonctions d'autocorrélation statistique $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$
et d'autocovariance $C_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)])(X(t_2) - \mathbb{E}[X(t_2)])]$
mesurent la corrélation (statistique) entre les valeurs prises par le processus aux instants t_1 et t_2 .

- ▷ forte corrélation : relation linéaire entre les variables aléatoires $X(t_2)$ et $X(t_1)$
- ▷ faible corrélation : pas de relation entre les variables aléatoires $X(t_2)$ et $X(t_1)$ ou relation non linéaire (sans tendance linéaire)

Fonction d'autocorrélation statistique : interprétation

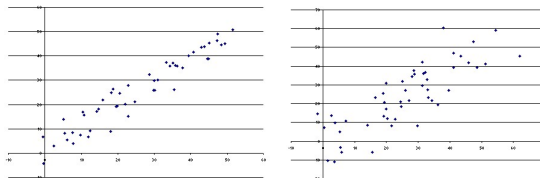


Différents types de corrélation entre $X(t_1)$ et $X(t_2)$

a) Corrélation nulle. – b) Corrélation positive maximale – c) Corrélation négative maximale –
d) Corrélation forte – e) Corrélation faible.

source : <http://bv.alloprof.qc.ca>

Fonction d'autocorrélation normalisée



On normalise souvent la valeur de la corrélation entre deux variables aléatoires :

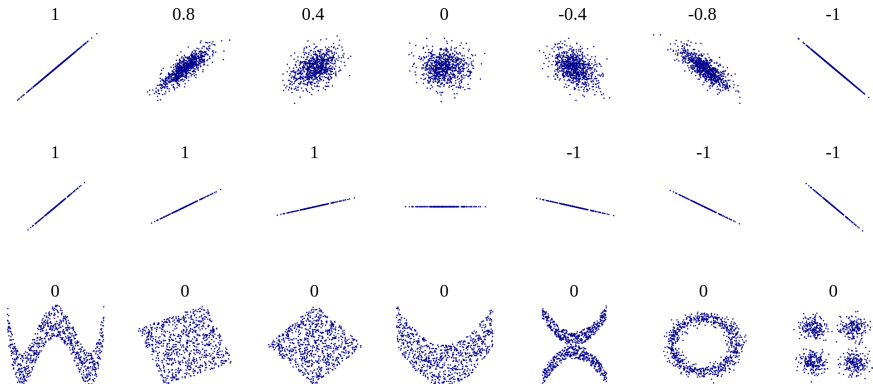
⇒ coefficient de corrélation $r \in [-1, +1]$:

Fonction d'autocorrélation normalisée :

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{\mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)])(X(t_2) - \mathbb{E}[X(t_2)])]}{\sigma_X(t_1) \sigma_X(t_2)}$$

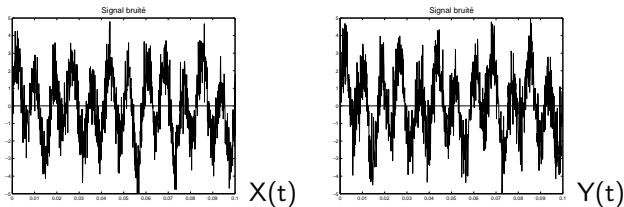
$r_X(t_1, t_2) \in [-1, +1]$ et $r_X(t_1, t_1) = 1$ (maximum).

Rappel : coefficient de corrélation



Différents coefficients de corrélation r entre $X(t_1)$ et $X(t_2)$

Intercorrélation et intercovariance



Si $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux signaux aléatoires on définit les fonctions d'intercorrélation et d'intercovariance qui permettent d'analyser si les variations statistiques de $X(t_1)$ sont liées à celle de $Y(t_2)$.

La fonction d'intercorrélation permet ainsi de déterminer si deux signaux différents présentent des composantes dont les variations sont liées et quel différence temporelle sépare ces composantes.

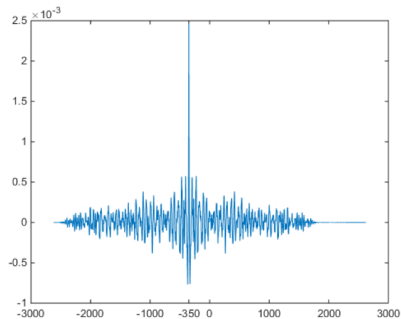
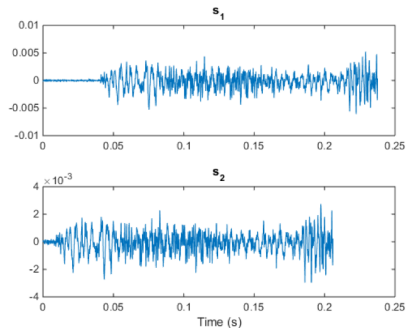
- Fonction d'intercorrélation : $R_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1) Y(t_2)]$

- Fonction d'intercovariance (ou covariance croisée) :

$$C_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)]) (Y(t_2) - \mathbb{E}[X(t_2)])]$$

- Fonction d'intercorrélation normalisée : $r_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)]) (Y(t_2) - \mathbb{E}[X(t_2)])]}{\sigma_X(t_1) \sigma_Y(t_2)}$
 $r_{XY}(t_1, t_2) \in [-1, +1]$ mais $r_{XY}(t_1, t_1) \neq 1$ (en général).

Fonction d'intercorrélation : exemple



Détermination du décalage temporel entre deux signaux aléatoires par intercorrélation

Source : Mathworks Matlab SP toolbox

Analyse de la connectivité cérébrale par intercorrélation de signaux IRMf

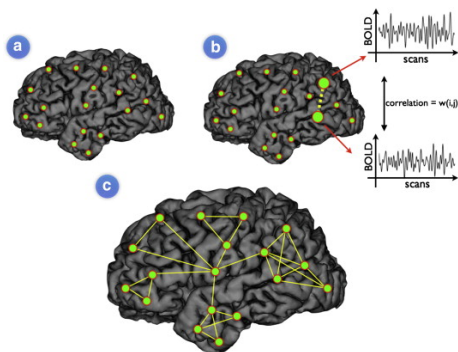


Figure 3 Modeling the functional brain network. The functional connected brain network can be represented as a graph, consisting of nodes, and edges (or connections) between regions that are functionally linked. First, the collection of nodes is defined. T...

Martijn P. van den Heuvel , Hilleke E. Hulshoff Pol

Exploring the brain network: A review on resting-state fMRI functional connectivity

Cas des processus aléatoires complexes

Un processus aléatoire complexe $Z(t)$ est défini par deux signaux aléatoires réels $X(t)$ et $Y(t)$:

$$Z(t) = X(t) + j Y(t)$$

- Valeur moyenne :

$$m_Z(t) = \mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}[X(t)] + j\mathbb{E}[Y(t)]$$

- Variance :

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2(t) &= \mathbb{E}[|Z(t) - m_Z(t)|^2] \\ &= \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])^2] + \mathbb{E}[(Y(t) - \mathbb{E}[Y(t)])^2]\end{aligned}$$

- Autocorrélation :

$$R_Z(t_1, t_2) = \mathbb{E}[Z(t_1) Z(t_2)^*] = R_Z^*(t_2, t_1)$$

- Autocovariance :

$$\begin{aligned}C_Z(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[(Z(t_1) - m_Z(t_1))(Z(t_2) - m_Z(t_2))^*] \\ &= R_Z(t_1, t_2) - m_Z(t_1)m_Z^*(t_2)\end{aligned}$$

- Intercorrélation :

$$R_{ZW}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[Z(t_1) W(t_2)^*]$$

- Intercovariance :

$$C_{ZW}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[(Z(t_1) - m_Z(t_1))(W(t_2) - m_W(t_2))^*]$$

Cas des processus aléatoires complexes

Un processus aléatoire complexe $Z(t)$ est défini par deux signaux aléatoires réels $X(t)$ et $Y(t)$:

$$Z(t) = X(t) + j Y(t)$$

- Valeur moyenne :

$$m_Z(t) = \mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}[X(t)] + j\mathbb{E}[Y(t)]$$

- Variance :

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2(t) &= \mathbb{E}[|Z(t) - m_Z(t)|^2] \\ &= \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])^2] + \mathbb{E}[(Y(t) - \mathbb{E}[Y(t)])^2]\end{aligned}$$

- Autocorrélation :

$$R_Z(t_1, t_2) = \mathbb{E}[Z(t_1) Z(t_2)^*] = R_Z^*(t_2, t_1)$$

- Autocovariance :

$$\begin{aligned}C_Z(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[(Z(t_1) - m_Z(t_1))(Z(t_2) - m_Z(t_2))^*] \\ &= R_Z(t_1, t_2) - m_Z(t_1)m_Z^*(t_2)\end{aligned}$$

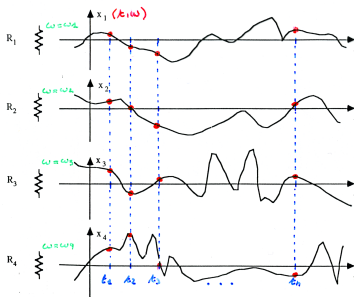
- Intercorrélation :

$$R_{ZW}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[Z(t_1) W(t_2)^*]$$

- Intercovariance :

$$C_{ZW}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[(Z(t_1) - m_Z(t_1))(W(t_2) - m_W(t_2))^*]$$

Moyennes statistiques - Moyennes temporelles



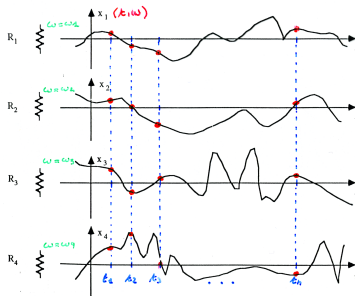
- La **moyenne statistique** d'une grandeur (variable) aléatoire Z est notée $\mathbb{E}[Z]$. Elle s'interprète comme la moyenne des valeurs que prend Z sur toutes les réalisations possibles.

Exemple : moyenne statistique $m_X(t) = \mathbb{E}[X(t, \omega)]$ (à t fixé).

- La **moyenne temporelle** d'une fonction $Z(t)$, notée $\overline{Z(t)}$, est la valeur moyenne de $Z(t)$ intégrée sur le temps.

Exemple : $\overline{X(t, \omega)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) dt$ (pour ω fixé).

Moyennes statistiques - Moyennes temporelles



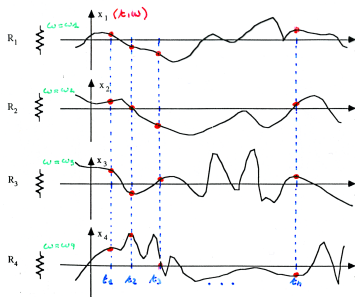
- La **moyenne statistique** d'une grandeur (variable) aléatoire Z est notée $\mathbb{E}[Z]$. Elle s'interprète comme la moyenne des valeurs que prend Z sur toutes les réalisations possibles.

Exemple : moyenne statistique $m_X(t) = \mathbb{E}[X(t, \omega)]$ (à t fixé).

- La **moyenne temporelle** d'une fonction $Z(t)$, notée $\overline{Z(t)}$, est la valeur moyenne de $Z(t)$ intégrée sur le temps.

Exemple : $\overline{X(t, \omega)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) dt$ (pour ω fixé).

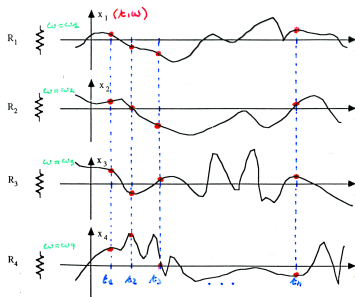
Moyennes statistiques



Comment calculer les moyennes statistiques ?

- Lorsque les densités de probabilité sont connues, on peut faire le calcul analytique.
Ex. : $\mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx.$
- Lorsque l'on dispose d'un grand nombre de réalisations, on peut **approcher expérimentalement les moyennes statistiques** en moyennant les variables sur les réalisations disponibles (cf. dia suivante).
- Lorsque l'on dispose de peu de réalisations (une seule parfois) on utilise la **propriété d'ergodicité** pour remplacer moyennes statistiques par des moyennes temporelles (cf. plus loin).

Moyennes statistiques



Comment calculer les moyennes statistiques ?

- Lorsque les densités de probabilité sont connues, on peut faire le **calcul analytique**.
Ex. : $\mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx.$
- Lorsque l'on dispose d'un grand nombre de réalisations, on peut **approcher expérimentalement les moyennes statistiques** en moyennant les variables sur les réalisations disponibles (cf. dia suivante).
- Lorsque l'on dispose de peu de réalisations (une seule parfois) on utilise la **propriété d'ergodicité** pour remplacer moyennes statistiques par des moyennes temporelles (cf. plus loin).

Moyennes statistiques : approche expérimentale

Ainsi, si on dispose de M réalisations de X (notées $X(t, \omega_1)$, $X(t, \omega_2)$, \dots , $X(t, \omega_M)$), on montre que (loi des grands nombres, M grand) :

▷ **Valeur moyenne statistique :**

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx$$
$$\simeq \frac{X(t, \omega_1) + X(t, \omega_2) + \dots + X(t, \omega_M)}{M} \quad \text{moyenne des } M \text{ réalisations, } M \text{ grand}$$

▷ **Fonction d'autocorrélation statistique :**

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1) X^*(t_2)]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$
$$\simeq \frac{X(t_1, \omega_1) X^*(t_2, \omega_1) + \dots + X(t_1, \omega_M) X^*(t_2, \omega_M)}{M} \quad \text{pour } M \text{ grand}$$

▷ **Densités de probabilité d'ordre 1, 2, ... :** approximation par histogrammes ou par une loi connue (gaussienne, ...)

Moyennes statistiques : approche expérimentale

Ainsi, si on dispose de M réalisations de X (notées $X(t, \omega_1)$, $X(t, \omega_2)$, \dots , $X(t, \omega_M)$), on montre que (loi des grands nombres, M grand) :

▷ **Valeur moyenne statistique :**

$$\begin{aligned} m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx \\ &\simeq \frac{X(t, \omega_1) + X(t, \omega_2) + \dots + X(t, \omega_M)}{M} \quad \text{moyenne des } M \text{ réalisations, } M \text{ grand} \end{aligned}$$

▷ **Fonction d'autocorrélation statistique :**

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1) X^*(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \\ &\simeq \frac{X(t_1, \omega_1) X^*(t_2, \omega_1) + \dots + X(t_1, \omega_M) X^*(t_2, \omega_M)}{M} \quad \text{pour } M \text{ grand} \end{aligned}$$

▷ **Densités de probabilité d'ordre 1, 2, ... :** approximation par histogrammes ou par une loi connue (gaussienne, ...)

Moyennes statistiques : approche expérimentale

Ainsi, si on dispose de M réalisations de X (notées $X(t, \omega_1)$, $X(t, \omega_2)$, \dots , $X(t, \omega_M)$), on montre que (loi des grands nombres, M grand) :

▷ **Valeur moyenne statistique :**

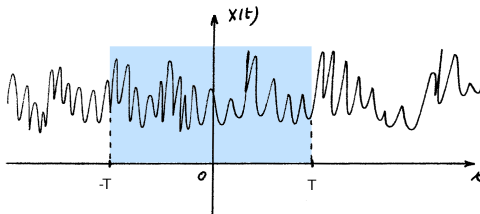
$$\begin{aligned} m_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x; t) dx \\ &\simeq \frac{X(t, \omega_1) + X(t, \omega_2) + \dots + X(t, \omega_M)}{M} \quad \text{moyenne des } M \text{ réalisations, } M \text{ grand} \end{aligned}$$

▷ **Fonction d'autocorrélation statistique :**

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1) X^*(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \\ &\simeq \frac{X(t_1, \omega_1) X^*(t_2, \omega_1) + \dots + X(t_1, \omega_M) X^*(t_2, \omega_M)}{M} \quad \text{pour } M \text{ grand} \end{aligned}$$

▷ **Densités de probabilité d'ordre 1, 2, ... :** approximation par histogrammes ou par une loi connue (gaussienne, ...)

Moyennes temporelles



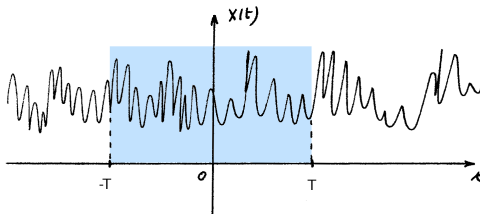
▷ Valeur moyenne temporelle :

$$\overline{X(t, \omega)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) dt \quad \text{ou} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \omega) dt$$

▷ Fonction d'autocorrélation temporelle :

$$\overline{X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega) dt$$

Moyennes temporelles



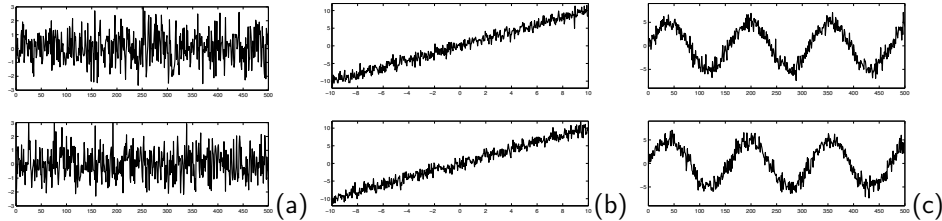
▷ Valeur moyenne temporelle :

$$\overline{X(t, \omega)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) dt \quad \text{ou} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \omega) dt$$

▷ Fonction d'autocorrélation temporelle :

$$\overline{X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega) dt$$

Exemple : moyenne statistique, moyenne temporelle



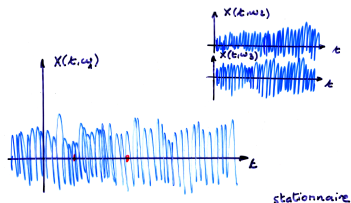
Signaux aléatoires (2 réalisations) :

(a) moyenne stat. = 0 $\forall t$; moyenne temp. = 0 $\forall \omega$

(b) moyenne statistique croissante (linéairement en fonction de t) ;
moyenne temporelle = 0 $\forall \omega$

(c) moyenne stat. variant sinusoidalement en fonction de t ; moyenne temp. = 0 $\forall \omega$

Processus stationnaires au sens strict



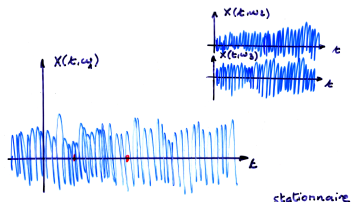
Pour un processus aléatoire quelconque, les caractéristiques statistiques (densités de probabilités d'ordre n , moments) dépendent des instants t_i auxquels elles sont calculées.

Certains processus présentent des caractéristiques statistiques invariantes à tout changement de l'origine des temps. On dit qu'ils sont stationnaires.

• Les processus stationnaires au sens strict vérifient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall t_i, \forall n, f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f_{X(t_1+\theta), X(t_2+\theta), \dots, X(t_n+\theta)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1+\theta, t_2+\theta, \dots, t_n+\theta)$$

Processus stationnaires au sens strict



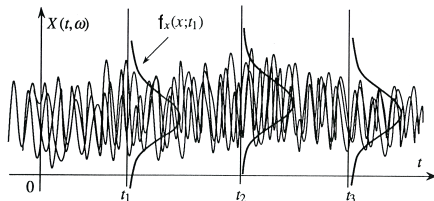
Pour un processus aléatoire quelconque, les caractéristiques statistiques (densités de probabilités d'ordre n , moments) dépendent des instants t_i auxquels elles sont calculées.

Certains processus présentent des caractéristiques statistiques invariantes à tout changement de l'origine des temps. On dit qu'ils sont stationnaires.

- Les processus **stationnaires au sens strict** vérifient :

$$\begin{aligned} \forall \quad \theta \in \mathbf{R}, \forall t_i, \forall n, \quad & f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = \quad & f_{X(t_1+\theta), X(t_2+\theta), \dots, X(t_n+\theta)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \theta, t_2 + \theta, \dots, t_n + \theta) \end{aligned}$$

Processus stationnaires au second ordre



- Les processus aléatoires **stationnaires au sens large (ou au second ordre)** vérifient les propriétés suivantes :

- ▷ la moyenne statistique $\mathbb{E}[X(t)] = m_X$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la variance $\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] = \sigma_X^2$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ vérifie :

$$\forall \theta \quad R_X(t_1 + \theta, t_2 + \theta) = R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)]$$

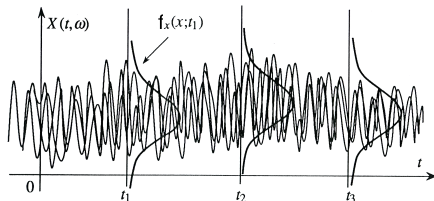
c'est-à-dire $R_X(t_1, t_2)$ ne dépend que de : $\tau = t_1 - t_2$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)]$$

- ▷ La fonction d'autocovariance $C_X(t_1, t_2)$ ne dépend alors que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} C_X(\tau) &= \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] \\ &= R_X(\tau) - |m_X|^2 \end{aligned}$$

Processus stationnaires au second ordre



- Les processus aléatoires **stationnaires au sens large (ou au second ordre)** vérifient les propriétés suivantes :

- ▷ la moyenne statistique $\mathbb{E}[X(t)] = m_X$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la variance $\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] = \sigma_X^2$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ vérifie :

$$\forall \theta \quad R_X(t_1 + \theta, t_2 + \theta) = R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)]$$

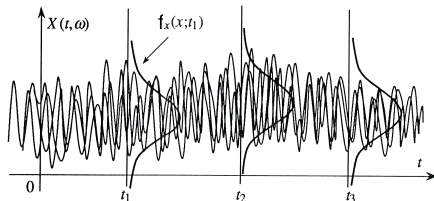
c'est-à-dire $R_X(t_1, t_2)$ ne dépend que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)]$$

- ▷ La fonction d'autocovariance $C_X(t_1, t_2)$ ne dépend alors que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} C_X(\tau) &= \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] \\ &= R_X(\tau) - |m_X|^2 \end{aligned}$$

Processus stationnaires au second ordre



- Les processus aléatoires **stationnaires au sens large (ou au second ordre)** vérifient les propriétés suivantes :

- ▷ la moyenne statistique $\mathbb{E}[X(t)] = m_X$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la variance $\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] = \sigma_X^2$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ vérifie :

$$\forall \theta \quad R_X(t_1 + \theta, t_2 + \theta) = R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)]$$

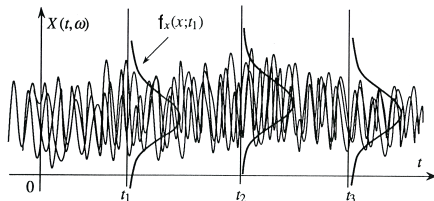
c'est-à-dire $R_X(t_1, t_2)$ ne dépend que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)]$$

- ▷ La fonction d'autocovariance $C_X(t_1, t_2)$ ne dépend alors que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} C_X(\tau) &= \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] \\ &= R_X(\tau) - |m_X|^2 \end{aligned}$$

Processus stationnaires au second ordre



- Les processus aléatoires **stationnaires au sens large (ou au second ordre)** vérifient les propriétés suivantes :

- ▷ la moyenne statistique $\mathbb{E}[X(t)] = m_X$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la variance $\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] = \sigma_X^2$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ vérifie :

$$\forall \theta \quad R_X(t_1 + \theta, t_2 + \theta) = R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)]$$

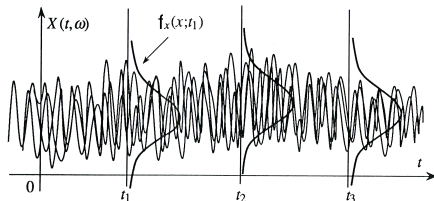
c'est-à-dire $R_X(t_1, t_2)$ ne dépend que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)]$$

- ▷ La fonction d'autocovariance $C_X(t_1, t_2)$ ne dépend alors que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} C_X(\tau) &= \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] \\ &= R_X(\tau) - |m_X|^2 \end{aligned}$$

Processus stationnaires au second ordre



- Les processus aléatoires **stationnaires au sens large (ou au second ordre)** vérifient les propriétés suivantes :

- ▷ la moyenne statistique $\mathbb{E}[X(t)] = m_X$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la variance $\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] = \sigma_X^2$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ vérifie :

$$\forall \theta \quad R_X(t_1 + \theta, t_2 + \theta) = R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)]$$

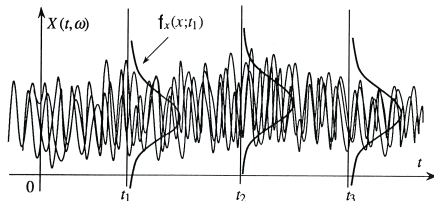
c'est-à-dire $R_X(t_1, t_2)$ ne dépend que de : $\tau = t_1 - t_2$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)]$$

- ▷ La fonction d'autocovariance $C_X(t_1, t_2)$ ne dépend alors que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} C_X(\tau) &= \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] \\ &= R_X(\tau) - |m_X|^2 \end{aligned}$$

Processus stationnaires au second ordre



- Les processus aléatoires **stationnaires au sens large (ou au second ordre)** vérifient les propriétés suivantes :

- ▷ la moyenne statistique $\mathbb{E}[X(t)] = m_X$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la variance $\mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t)))^2] = \sigma_X^2$ ne dépend pas du temps t ;
- ▷ la fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ vérifie :

$$\forall \theta \quad R_X(t_1 + \theta, t_2 + \theta) = R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)]$$

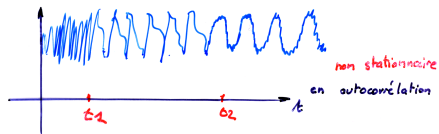
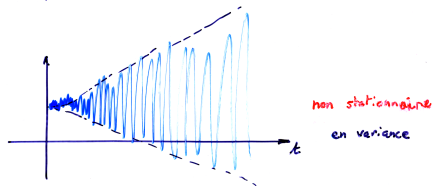
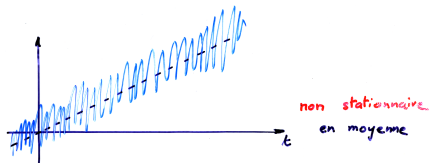
c'est-à-dire $R_X(t_1, t_2)$ ne dépend que de : $\tau = t_1 - t_2$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)]$$

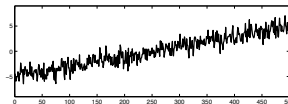
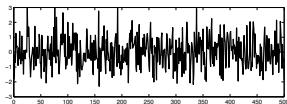
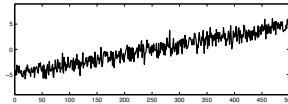
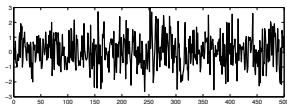
- ▷ La fonction d'autocovariance $C_X(t_1, t_2)$ ne dépend alors que de $\tau = t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} C_X(\tau) &= \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] \\ &= R_X(\tau) - |m_X|^2 \end{aligned}$$

Signaux stationnaires-non stationnaires

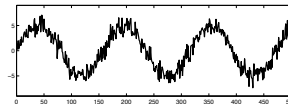
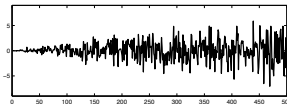
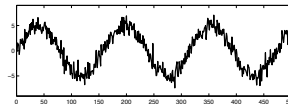
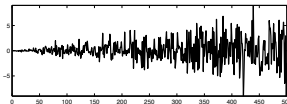


Signaux stationnaires-non stationnaires



(a)

(b)

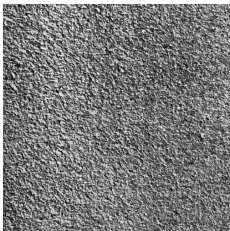


(c)

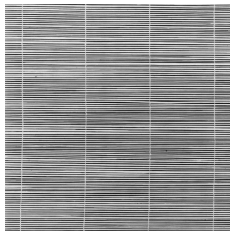
(d)

(a) : stationnaire - (b) (c) et (d) : non stationnaires

Images (textures) stationnaires-non stationnaires



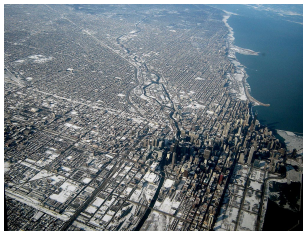
(a)



(b)



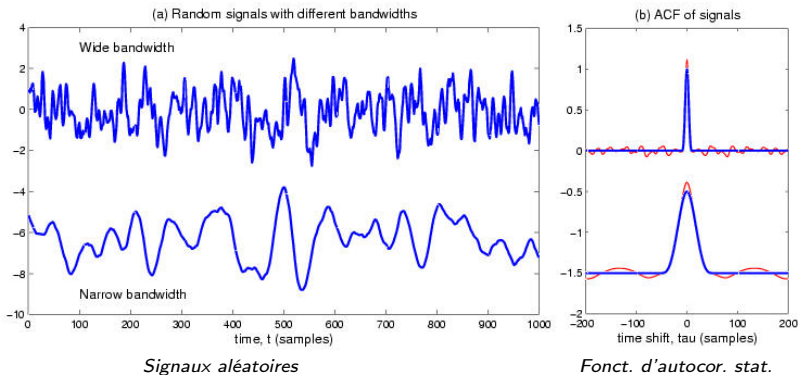
(c)



(d)

(a) et (b) : stationnaires - (c) et (d) : non stationnaires [(a) : liège compressé, (b) : paille, (c) : bois, (d) : Chicago downtown area] © Brodatz textures

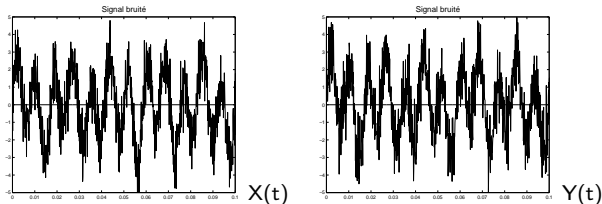
Signaux stationnaires : interprétation de la fonction d'autocorrélation



source : Nick Kingsbury, Spectral properties of random signals (CC)

La fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)]$ mesure **la ressemblance** entre les variations statistiques du signal à deux instant séparés de τ .

Processus conjointement stationnaires - Intercorrélation



Deux processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement stationnaires (au second ordre) si ils sont stationnaires et si leur fonction d'intercorrélation $R_{XY}(t_1, t_2)$ ne dépend que de $\tau = t_1 - t_2$. On définit alors :

- La fonction d'intercorrélation statistique :

$$R_{XY}(\tau) = \mathbb{E}[X(t)Y^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)Y^*(t)]$$

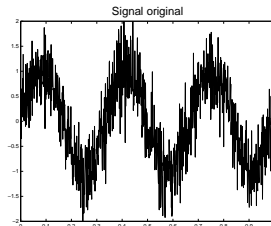
- La fonction d'intercovariance statistique :

$$C_{XY}(\tau) = \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(Y(t - \tau) - m_Y)^*] = R_{XY}(\tau) - m_X m_Y^*$$

- Propriétés (ce ne sont pas des propriétés de symétrie!) :

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}^*(-\tau) \quad C_{XY}(\tau) = C_{YX}^*(-\tau)$$

Processus non corrélés

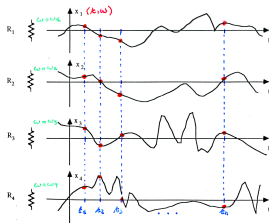


Deux processus conjointement stationnaires sont dits non corrélés (ou décorrélés) si :

$$\forall \tau \quad C_{XY}(\tau) = \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(Y(t - \tau) - m_Y)^*] = 0$$

- ▷ Décorrélation = pas de relation linéaire entre processus (*il peut y avoir une relation non linéaire !*).
- ▷ Indépendance = pas de relation (ni linéaire, ni non linéaire).
- ▷ Si deux processus sont indépendants, ils sont non corrélés. La réciproque n'est pas vraie en général. Elle est vraie dans le cas gaussien.
- ▷ **Important** : le signal est souvent décorrélié avec le bruit qui le perturbe.

Processus ergodiques I

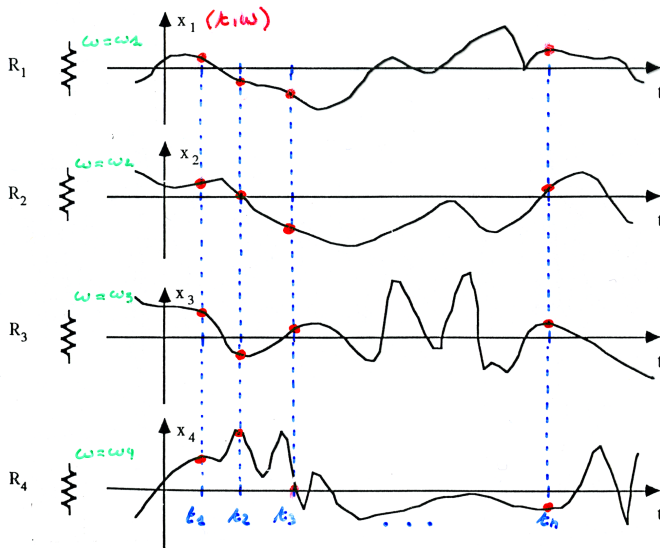


Très souvent, on ne dispose que d'une seule réalisation du signal aléatoire à analyser.

On peut se demander dans ce cas si les moyennes temporelles peuvent servir à estimer les moyennes statistiques. Clairement cela n'est pas possible si le processus est non stationnaire (car dans ce cas les moyennes statistiques varient au cours du temps).

Si le processus est stationnaire et si de surcroît les moyennes statistiques et temporelles coïncident **le processus est dit ergodique**.

L'ergodicité est une propriété très utile puisqu'elle permet de retrouver les propriétés statistiques d'un signal aléatoire (et son spectre de puissance) par l'analyse d'une seule réalisation de ce signal. Cette propriété est parfois difficile à vérifier.



Processus ergodiques II

- pour les processus à temps continu :

▷ **Valeur moyenne :**

$$m_X = \mathbb{E}[X(t, \omega)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) dt$$

▷ **Fonction d'autocorrélation :**

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \mathbb{E}[X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega) dt \end{aligned}$$

▷ **Fonction d'intercorrélation :**

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \mathbb{E}[X(t, \omega) Y^*(t - \tau, \omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) Y^*(t - \tau, \omega) dt \end{aligned}$$

Ces moyennes statistiques ou temporelles ne dépendent ni du temps t , ni de l'épreuve ω !

Processus ergodiques II

- pour les processus à temps continu :

▷ **Valeur moyenne :**

$$m_X = \mathbb{E}[X(t, \omega)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) dt$$

▷ **Fonction d'autocorrélation :**

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \mathbb{E}[X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega) dt \end{aligned}$$

▷ **Fonction d'intercorrélation :**

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \mathbb{E}[X(t, \omega) Y^*(t - \tau, \omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) Y^*(t - \tau, \omega) dt \end{aligned}$$

Ces moyennes statistiques ou temporelles ne dépendent ni du temps t , ni de l'épreuve ω !

Processus ergodiques II

- pour les processus à temps continu :

▷ **Valeur moyenne :**

$$m_X = \mathbb{E}[X(t, \omega)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) dt$$

▷ **Fonction d'autocorrélation :**

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \mathbb{E}[X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega) dt \end{aligned}$$

▷ **Fonction d'intercorrélation :**

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \mathbb{E}[X(t, \omega) Y^*(t - \tau, \omega)] \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) Y^*(t - \tau, \omega) dt \end{aligned}$$

Ces moyennes statistiques ou temporelles ne dépendent ni du temps t , ni de l'épreuve ω !

Processus ergodiques III

- pour les processus à temps discret :
 - ▷ valeur moyenne :

$$m_X = \mathbb{E}[X(n, \omega)] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} X(n, \omega)$$

- ▷ autocorrélation :

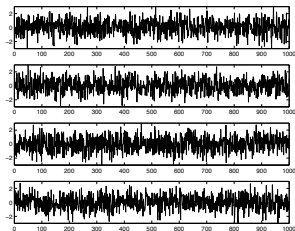
$$\begin{aligned} R_X(k) &= \mathbb{E}[X(n, \omega) X^*(n-k, \omega)] \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} X(n, \omega) X^*(n-k, \omega) \end{aligned}$$

- ▷ intercorrélation :

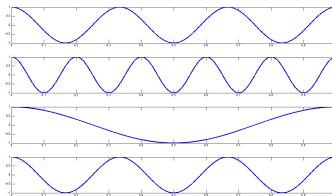
$$\begin{aligned} R_{XY}(k) &= \mathbb{E}[X(n, \omega) Y^*(n-k, \omega)] \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} X(n, \omega) Y^*(n-k, \omega) \end{aligned}$$

Ces moyennes statistiques ou temporelles ne dépendent ni de l'indice n , ni de l'épreuve ω

Ergodicité : interprétation



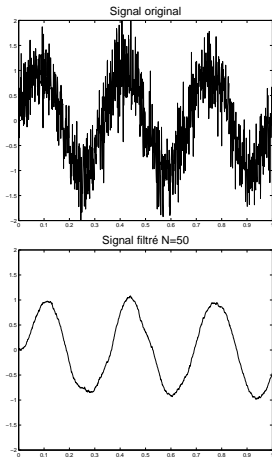
(a) Bruit blanc (ergodique)



(b)

(b) Sinusoïde à fréquence aléatoire (non ergodique)

- L'ergodicité est considéré comme une des notions les plus importantes en statistiques. Intuitivement, un processus (signal) sera ergodique si une réalisation quelconque de ce processus porte en elle toutes les informations statistiques permettant de décrire le processus dans son ensemble (càd sur toutes ses réalisations).
- L'ergodicité permet en particulier de calculer le spectre d'un signal aléatoire à partir d'une seule réalisation (voir chap. 2).
- Dans certains cas on peut établir l'ergodicité par le calcul théorique. Sinon on l'admet et on vérifie a posteriori que le système conçu fonctionne bien !

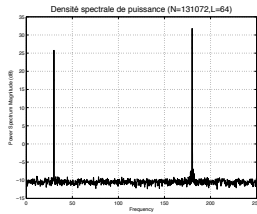
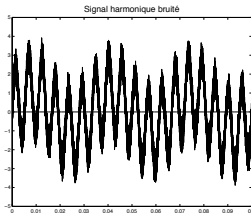


TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES

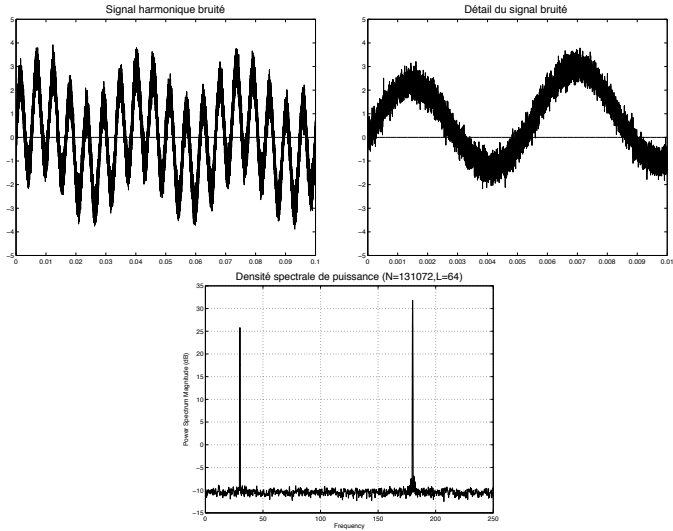
Partie 2

Partie 2

SIGNAUX ALÉATOIRES : REPRÉSENTATION SPECTRALE

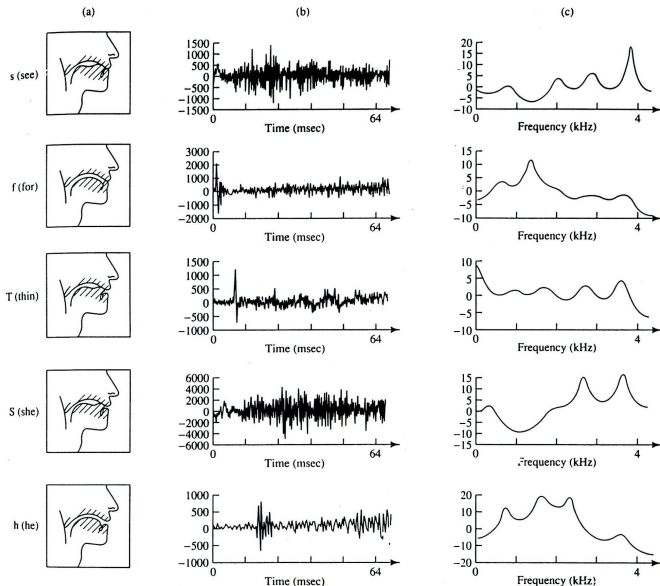


Analyse spectrale des signaux aléatoires : exemple



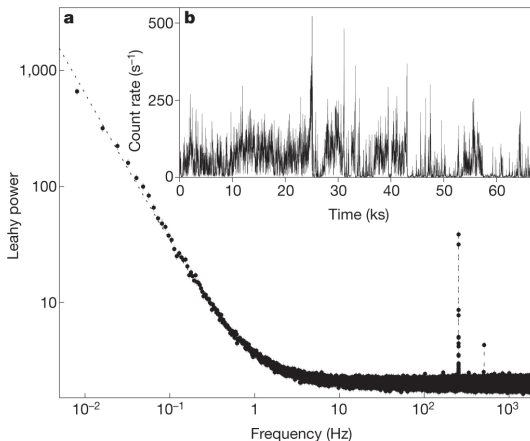
$$\text{Signal : } x(t) = \sin 2\pi 30t + 2 \sin 2\pi 180t + b(t)$$

Analyse spectrale des signaux aléatoires : exemple



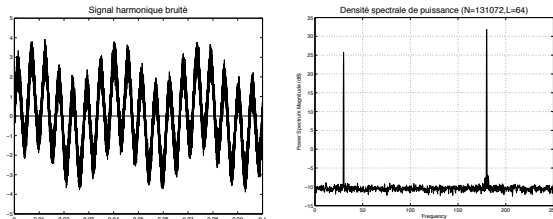
Analyse spectrale des signaux aléatoires : exemple

Variability of the X-ray emission of Pulsar IGR J18245–2452.



A Papitto *et al.* *Nature* **501**, 517–520 (2013) doi:10.1038/nature12470

Analyse spectrale des signaux aléatoires



On cherche, comme pour les signaux déterministes à développer des techniques d'analyse fréquentielle (analyse spectrale) **pour les signaux aléatoires stationnaires au second ordre.**

L'utilisation directe de la transformée de Fourier : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t, \omega) e^{-j2\pi ft} dt$ ne convient pas :

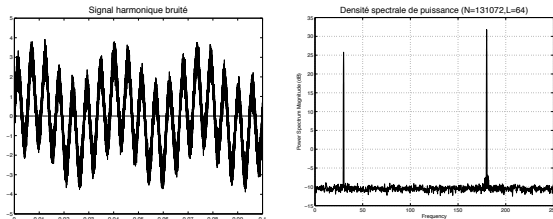
▷ $X(f)$ dépend de ω dans cette formule

▷ un signal aléatoire stationnaire est généralement d'énergie infinie, donc problème de convergence de l'intégrale de Fourier.

La représentation fréquentielle utilisée pour les signaux aléatoires stationnaires est la **densité spectrale de puissance (d.s.p.)** qui est définie comme la T.F. de la fonction d'autocorrélation statistique.

Elle s'interprète comme un **spectre de puissance moyen** (moyenne statistique).

Analyse spectrale des signaux aléatoires



On cherche, comme pour les signaux déterministes à développer des techniques d'analyse fréquentielle (analyse spectrale) **pour les signaux aléatoires stationnaires au second ordre.**

L'utilisation directe de la transformée de Fourier : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t, \omega) e^{-j2\pi ft} dt$ ne convient pas :

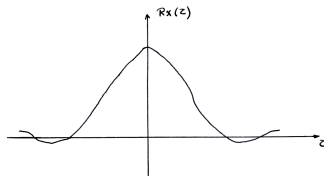
▷ $X(f)$ dépend de ω dans cette formule

▷ un signal aléatoire stationnaire est généralement d'énergie infinie, donc problème de convergence de l'intégrale de Fourier.

La représentation fréquentielle utilisée pour les signaux aléatoires stationnaires est la **densité spectrale de puissance** (d.s.p.) qui est définie comme la **T.F. de la fonction d'autocorrélation statistique.**

Elle s'interprète comme un **spectre de puissance moyen** (moyenne statistique).

Fonction d'autocorrélation, propriétés I



On considère un signal aléatoire $X(t)$ **stationnaire au second ordre** de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)] \in \mathbb{C}$$

- $R_X(0)$ est réel et représente la **puissance moyenne** P_X du signal :

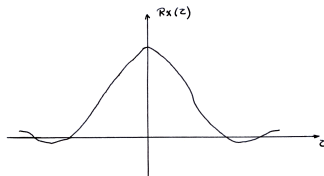
$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[|X(t)|^2] \quad (= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t, \omega)|^2 dt, \text{ si le signal est ergodique})$$

- La fonction d'autocorrélation admet un maximum absolu à l'origine : $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$
- La fonction d'autocorrélation est **symétrique** par rapport à l'origine (symétrie hermitienne) :

$$R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)$$

si X est réel : $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

Fonction d'autocorrélation, propriétés I



On considère un signal aléatoire $X(t)$ **stationnaire au second ordre** de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)] \in \mathbb{C}$$

- $R_X(0)$ est réel et représente la **puissance moyenne** P_X du signal :

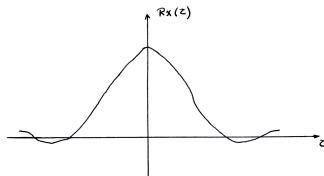
$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[|X(t)|^2] \quad (= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t, \omega)|^2 dt, \text{ si le signal est ergodique})$$

- La fonction d'autocorrélation **admet un maximum absolu à l'origine** : $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$
- La fonction d'autocorrélation est **symétrique** par rapport à l'origine (symétrie hermitienne) :

$$R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)$$

si X est réel : $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

Fonction d'autocorrélation, propriétés I



On considère un signal aléatoire $X(t)$ **stationnaire au second ordre** de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$:

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X^*(t)] \in \mathbb{C}$$

- $R_X(0)$ est réel et représente la **puissance moyenne** P_X du signal :

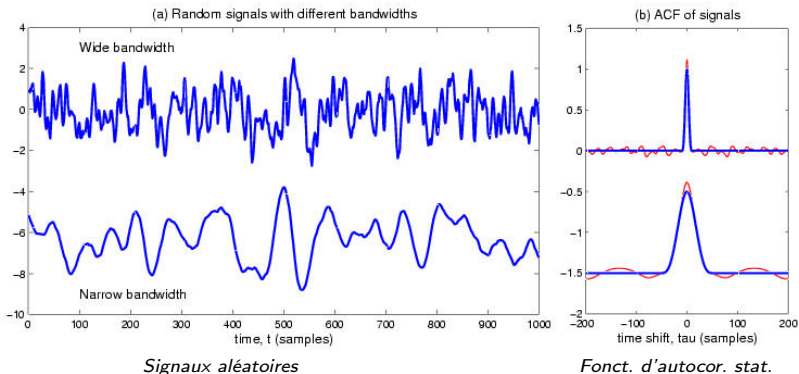
$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[|X(t)|^2] \quad (= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t, \omega)|^2 dt, \text{ si le signal est ergodique})$$

- La fonction d'autocorrélation **admet un maximum absolu à l'origine** : $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$
- La fonction d'autocorrélation est **symétrique** par rapport à l'origine (symétrie hermitienne) :

$$R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)$$

si X est réel : $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

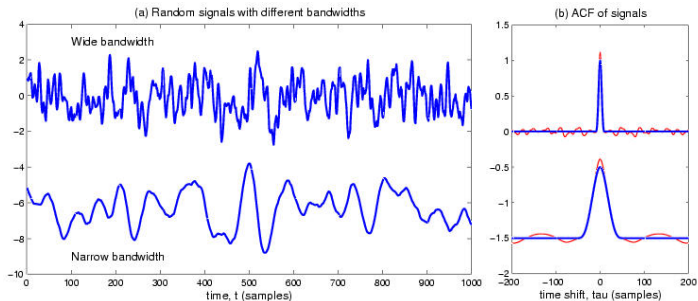
Fonction d'autocorrélation, propriétés II



source : Nick Kingsbury, Spectral properties of random signals (CC)

Les signaux aléatoires variant rapidement (lentement) présentent une décroissance rapide (lente) de leur fonction d'autocorrélation.

Fonction d'autocorrélation, propriétés III

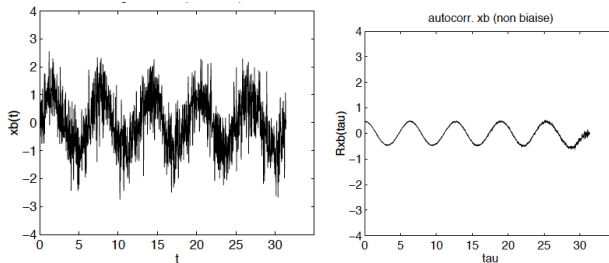


Signaux aléatoires décorrélés pour $\tau \rightarrow +\infty$

Signal $X(t, \omega)$ (à gauche), fonction $R_X(\tau)$ (à droite)

- **Décorrélation à l'infini** : pour de nombreux signaux aléatoires, il y a décorrélation entre $X(t)$ et $X(t - \tau)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$.

Fonction d'autocorrélation, propriétés III



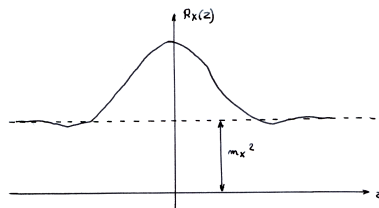
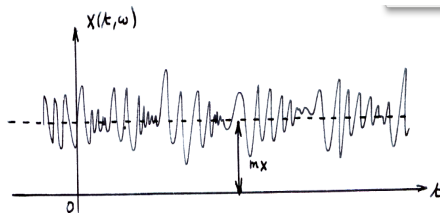
Signal aléatoire (sinus à phase aléatoire+bruit) : non décorrélé pour $\tau \rightarrow +\infty$

Signal $X(t, \omega)$ (à gauche), fonction $R_X(\tau)$, $\tau > 0$ (à droite)

- **Décorrélation à l'infini** : pour de nombreux signaux aléatoires, il y a décorrélation entre $X(t)$ et $X(t - \tau)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$.
- **Contre-exemple** :

$$X(t, \omega) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi(\omega)) + N(t, \omega) \quad \text{avec} \quad \Phi(\omega) \sim \mathcal{U}[0, 2\pi] \quad N(t, \omega) : \text{bruit blanc}$$
$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Fonction d'autocorrélation, propriétés III



- **Décorrélation à l'infini** : lorsqu'il y a décorrélation entre $X(t)$ et $X(t - \tau)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. Il vient :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} C_X(\tau) = 0$$

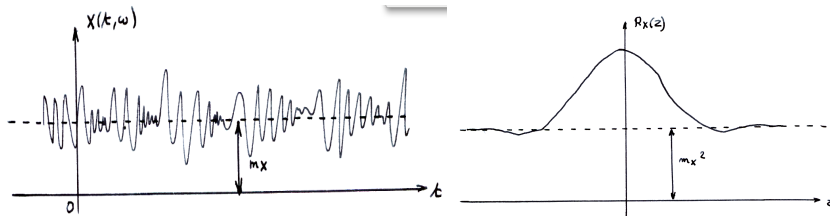
$$\Leftrightarrow \lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) - |m_X|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = |m_X|^2$$

- Caractère défini positif de $R_X(\tau)$:

$$\forall a_i, a_j \in \mathbb{C}, \forall n \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j^* R_X(t_i - t_j) \geq 0$$

Fonction d'autocorrélation, propriétés III



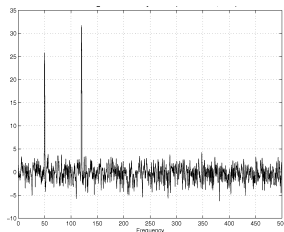
- **Décorrélation à l'infini** : lorsqu'il y a décorrélation entre $X(t)$ et $X(t - \tau)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. Il vient :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow +\infty} C_X(\tau) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) - |m_X|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) &= |m_X|^2\end{aligned}$$

- **Caractère défini positif de $R_X(\tau)$** :

$$\forall a_i, a_j \in \mathbb{C}, \forall n \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j^* R_X(t_i - t_j) \geq 0$$

Densité spectrale de puissance (d.s.p.) I



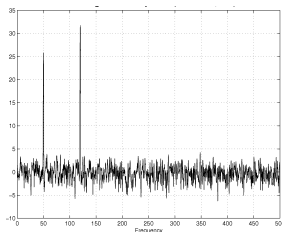
La d.s.p. $S_X(f)$ d'un signal aléatoire stationnaire au second ordre $X(t, \omega)$ constitue sa représentation fréquentielle. Elle est définie comme **la T.F. de la fonction d'autocorrélation**.

- **Signaux à temps continu :**

- ▶ définition :
$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad \in \mathbb{R}$$

- ▶ relation inverse :
$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{j2\pi f \tau} df \quad \in \mathbb{C}$$

Densité spectrale de puissance (d.s.p.) II



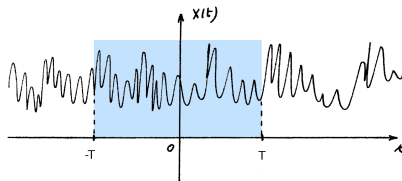
- Signaux à temps discret :

- ▶ définition :
$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) e^{-j2\pi kf} \quad (\text{périodique de période 1}) \in \mathbb{R}$$

- ▶ relation inverse :
$$R_X(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_X(f) e^{j2\pi kf} df \in \mathbb{C}$$

D.S.P. : interprétation I

Rappel : densité spectrale de puissance d'un signal déterministe



Signal tronqué sur $[-T, T]$: $x_{2T}(t) = x(t) \cdot \text{rect}_{2T}(t)$

- Fonction d'autocorrélation temporelle

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- Densité spectrale de puissance = spectre de puissance

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |X_{2T}(f)|^2 \in \mathbb{R} \geq 0$$

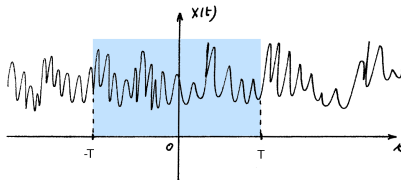
où $X_{2T}(f) = \mathcal{F}[x_{2T}(t)] = \int_{-T}^T x(t)e^{-j2\pi f t} dt$

- Puissance moyenne de $x(t)$:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df$$

D.S.P. : interprétation I

Rappel : densité spectrale de puissance d'un signal déterministe



Signal tronqué sur $[-T, T]$: $x_{2T}(t) = x(t) \cdot \text{rect}_{2T}(t)$

- **Fonction d'autocorrélation temporelle**

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^*(t - \tau) dt$$

- Densité spectrale de puissance = spectre de puissance

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |X_{2T}(f)|^2 \in \mathbb{R} \geq 0$$

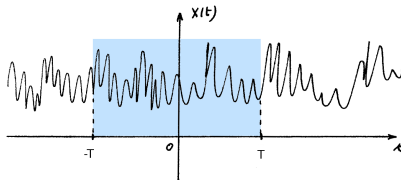
où $X_{2T}(f) = \mathcal{F}[x_{2T}(t)] = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt$

- Puissance moyenne de $x(t)$:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

D.S.P. : interprétation I

Rappel : densité spectrale de puissance d'un signal déterministe



Signal tronqué sur $[-T, T]$: $x_{2T}(t) = x(t) \cdot \text{rect}_{2T}(t)$

- Fonction d'autocorrélation temporelle

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- Densité spectrale de puissance = spectre de puissance

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |X_{2T}(f)|^2 \in \mathbb{R} \geq 0$$

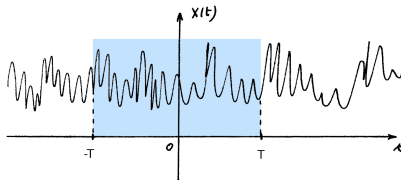
où $X_{2T}(f) = \mathcal{F}[x_{2T}(t)] = \int_{-T}^T x(t)e^{-j2\pi f t} dt$

- Puissance moyenne de $x(t)$:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df$$

D.S.P. : interprétation I

Rappel : densité spectrale de puissance d'un signal déterministe



Signal tronqué sur $[-T, T]$: $x_{2T}(t) = x(t) \cdot \text{rect}_{2T}(t)$

- Fonction d'autocorrélation temporelle

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- Densité spectrale de puissance = spectre de puissance

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |X_{2T}(f)|^2 \in \mathbb{R} \geq 0$$

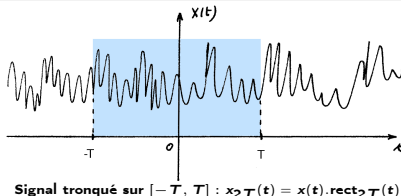
où $X_{2T}(f) = \mathcal{F}[x_{2T}(t)] = \int_{-T}^T x(t)e^{-j2\pi f t} dt$

- Puissance moyenne de $x(t)$:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df$$

D.S.P. : interprétation II

Densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire



- Fonction d'autocorrélation statistique

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t, \omega) \cdot x^*(t - \tau, \omega)]$$

- Densité spectrale de puissance = spectre de puissance moyen !

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} \left[|X_{2T}(f)|^2 \right] \in \mathbb{R} \geq 0$$

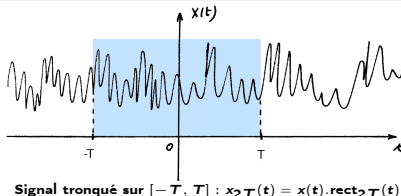
$$\text{où } X_{2T}(f) = \mathcal{F}[x_{2T}(t, \omega)] = \int_{-T}^T x(t, \omega) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Puissance moyenne de $x(t, \omega)$:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

D.S.P. : interprétation II

Densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire



- **Fonction d'autocorrélation statistique**

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t, \omega) \cdot x^*(t - \tau, \omega)]$$

- Densité spectrale de puissance = spectre de puissance moyen !

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} [|X_{2T}(f)|^2] \quad \in \mathbb{R} \geq 0$$

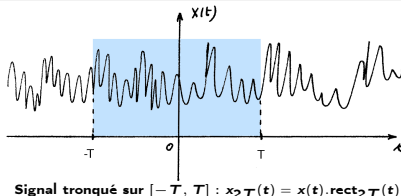
où $X_{2T}(f) = \mathcal{F}[x_{2T}(t, \omega)] = \int_{-T}^T x(t, \omega) e^{-j2\pi f t} dt$

- Puissance moyenne de $x(t, \omega)$:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

D.S.P. : interprétation II

Densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire



- **Fonction d'autocorrélation statistique**

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t, \omega) \cdot x^*(t - \tau, \omega)]$$

- **Densité spectrale de puissance = spectre de puissance moyen !**

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} [|X_{2T}(f)|^2] \in \mathbb{R} \geq 0$$

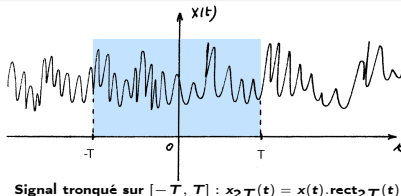
où $X_{2T}(f) = \mathcal{F}[x_{2T}(t, \omega)] = \int_{-T}^T x(t, \omega) e^{-j2\pi f t} dt$

- Puissance moyenne de $x(t, \omega)$:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

D.S.P. : interprétation II

Densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire



- Fonction d'autocorrélation statistique

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t, \omega) \cdot x^*(t - \tau, \omega)]$$

- Densité spectrale de puissance = spectre de puissance moyen !

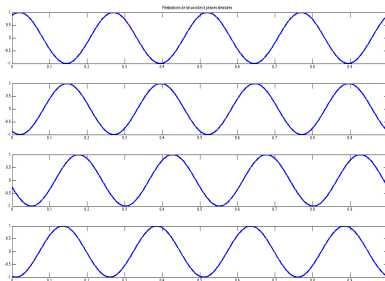
$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} [|X_{2T}(f)|^2] \in \mathbb{R} \geq 0$$

$$\text{où } X_{2T}(f) = \mathcal{F}[x_{2T}(t, \omega)] = \int_{-T}^T x(t, \omega) e^{-j2\pi f t} dt$$

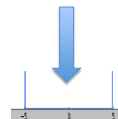
- Puissance moyenne de $x(t, \omega)$:

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

Exemple : sinusoïde à phase aléatoire



D.S.P. = Spectre de puissance moyen



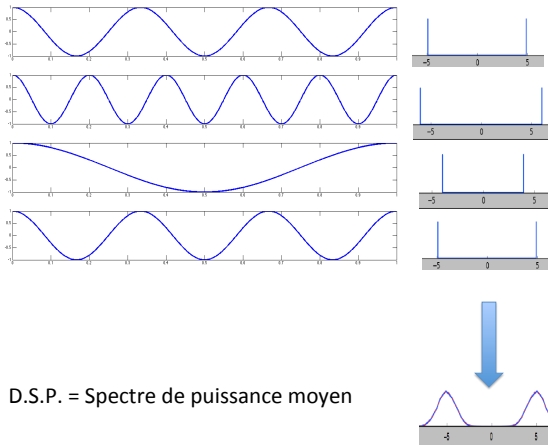
$X(t, \omega) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi(\omega))$ où $\Phi(\omega)$ est équirépartie sur $[0, 2\pi]$

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

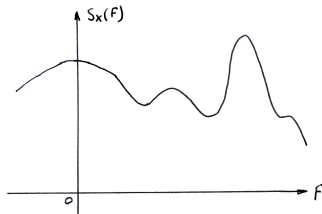
cf. TD Ex. 1

Exemple : sinusoïde à fréquence aléatoire



$X(t, \omega) = A \cos(2\pi F(\omega)t + \phi)$ où $F(\omega)$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(5, \sigma^2)$. cf. TD Ex. 5

D.S.P. : propriétés I



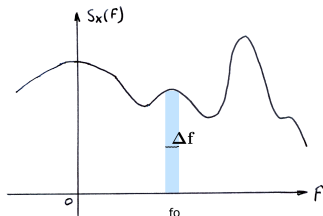
La densité spectrale de puissance $S_X(f)$ indique comment la puissance du signal se localise en fonction des fréquences. Elle possède les propriétés d'une densité :

- Son intégrale est **la puissance (moyenne)** P_X du signal :

$$\text{cas continu : } P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[X(t, \omega)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df$$

$$\text{cas discret : } P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[X(n, \omega)^2] = \sum_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_X(f) df$$

D.S.P. : propriétés II



- Cette puissance moyenne est localisée sur l'axe des fréquences. Si on filtre le signal $X(t)$ par un filtre passe-bande à bande étroite (largeur Δf) centré sur f_0 , la puissance moyenne du signal $Y(t)$ en sortie du filtre vaut :

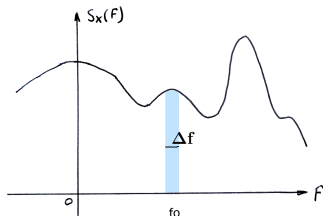
$$\mathbb{E}[|Y(t)|^2] = 2 S_X(f_0) \Delta f$$

- La puissance dans une bande de fréquence $[-B, +B]$ est égale à :

$$P_X[-B, +B] = \int_{-B}^{+B} S_X(f) df$$

Ces propriétés justifient l'appellation de "densité spectrale de puissance".

D.S.P. : propriétés II



- Cette puissance moyenne est localisée sur l'axe des fréquences. Si on filtre le signal $X(t)$ par un filtre passe-bande à bande étroite (largeur Δf) centré sur f_0 , la puissance moyenne du signal $Y(t)$ en sortie du filtre vaut :

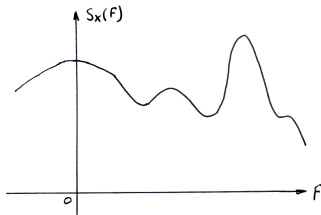
$$\mathbb{E}[|Y(t)|^2] = 2 S_X(f_0) \Delta f$$

- La puissance dans une bande de fréquence $[-B, +B]$ est égale à :

$$P_X[-B, +B] = \int_{-B}^{+B} S_X(f) df$$

Ces propriétés justifient l'appellation de "densité spectrale de puissance".

D.S.P. : propriétés III

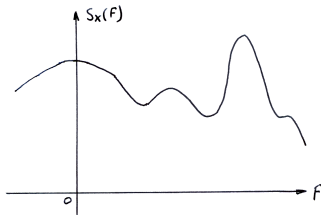


- $S_X(f)$ est une fonction réelle positive de f :

$$\forall f \quad S_X(f) \geq 0$$

- Si $X(t)$ est réel, $R_X(\tau)$ et $S_X(f)$ sont des fonctions réelles et paires.

D.S.P. : propriétés III

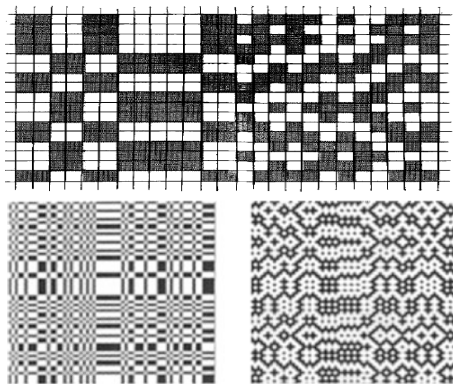


- $S_X(f)$ est une fonction réelle positive de f :

$$\boxed{\forall f \quad S_X(f) \geq 0}$$

- Si $X(t)$ est réel, $R_X(\tau)$ et $S_X(f)$ sont des **fonctions réelles et paires**.

D.S.P. : propriétés IV

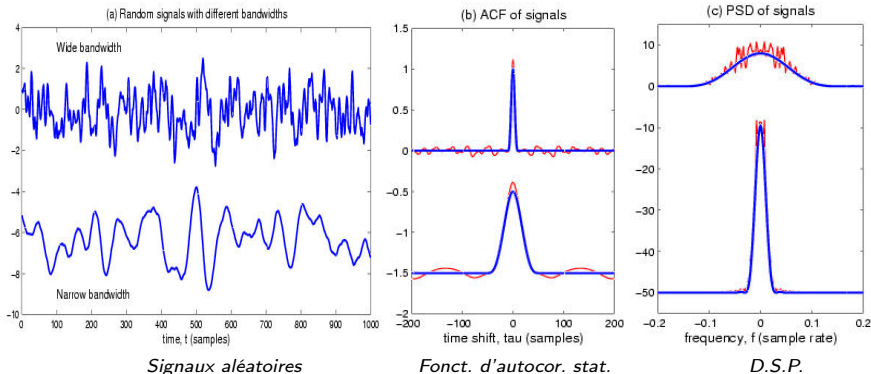


Images de textures aléatoires ayant mêmes statistiques jusqu'à l'ordre 2 (donc même dsp) et pourtant visuellement différentes (ici : statistiques d'ordre > 3 différentes). Sources : [Julesz1978, Portilla2000]

La d.s.p. ne caractérise pas entièrement un processus aléatoire.

Deux processus aléatoires différents peuvent avoir les mêmes d.s.p. (càd mêmes statistiques d'ordre 2, mais des statistiques d'ordre > 2 différentes).

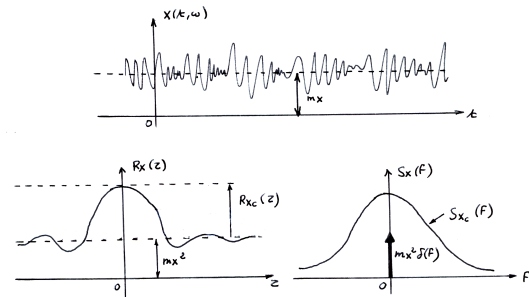
D.S.P. - allures typiques : HF / BF



source : Nick Kingsbury, Spectral properties of random signals (CC)

Les signaux aléatoires variant rapidement (lentement) présentent une décroissance rapide (lente) de leur fonction d'autocorrélation. Leurs d.s.p. sont larges (étroites) et contiennent des HF (BF).

D.S.P. - allures typiques : décorrélation à l'infini



Pour les signaux aléatoires décorrélés à l'infini, de moyenne m_X :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = |m_X|^2$$

Soit $X_c(t) = X(t) - m_X$ le signal centré (i.e. de moyenne nulle) associé à $X(t)$ ($\mathbb{E}[X_c(t)] = 0$). Il vient :

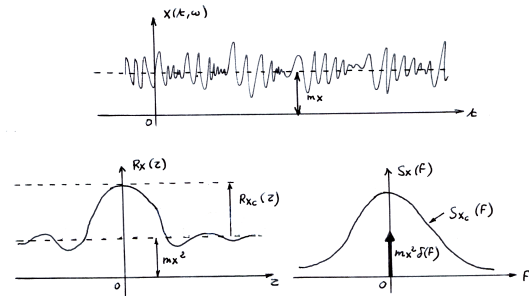
$$R_{X_c}(\tau) = \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] = R_X(\tau) - |m_X|^2$$

d'où :

$$S_X(f) = S_{X_c}(f) + |m_X|^2 \delta(f)$$

Lorsque le signal est de moyenne nulle ($m_X = 0$) il n'y a pas de raie à l'origine.

D.S.P. - allures typiques : décorrélation à l'infini



Pour les signaux aléatoires décorrélés à l'infini, de moyenne m_X :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = |m_X|^2$$

Soit $X_c(t) = X(t) - m_X$ le signal centré (i.e. de moyenne nulle) associé à $X(t)$ ($\mathbb{E}[X_c(t)] = 0$). Il vient :

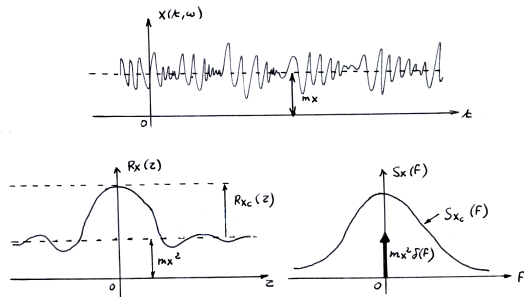
$$R_{X_c}(\tau) = \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] = R_X(\tau) - |m_X|^2$$

d'où :

$$S_X(f) = S_{X_c}(f) + |m_X|^2 \delta(f)$$

Lorsque le signal est de moyenne nulle ($m_X = 0$) il n'y a pas de raie à l'origine.

D.S.P. - allures typiques : décorrélation à l'infini



Pour les signaux aléatoires décorrélés à l'infini, de moyenne m_X :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = |m_X|^2$$

Soit $X_c(t) = X(t) - m_X$ le signal centré (i.e. de moyenne nulle) associé à $X(t)$ ($\mathbb{E}[X_c(t)] = 0$). Il vient :

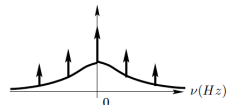
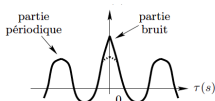
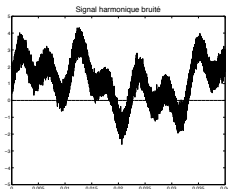
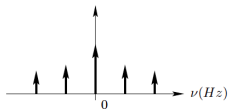
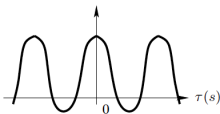
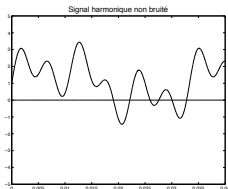
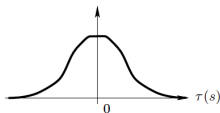
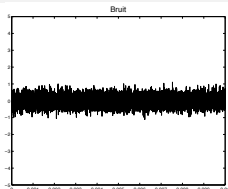
$$R_{X_c}(\tau) = \mathbb{E}[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)^*] = R_X(\tau) - |m_X|^2$$

d'où :

$$S_X(f) = S_{X_c}(f) + |m_X|^2 \delta(f)$$

Lorsque le signal est de moyenne nulle ($m_X = 0$) il n'y a pas de raie à l'origine.

D.S.P. - allures typiques : spectres continus et de raies

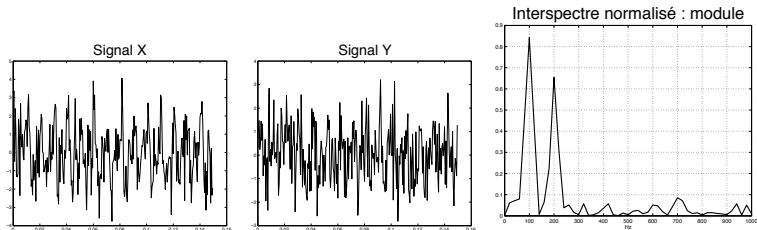


Signal

Fonct. d'autocor. stat.

D.S.P.

Interspectre



$$X(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + b(t), \quad Y(t) = 0.5 \cos(2\pi f_1 t - \frac{\pi}{4}) + 0.35 \sin(2\pi f_2 t - \frac{\pi}{2}) + b(t); \quad f_1 = 100 \text{ Hz et } f_2 = 200 \text{ Hz.}$$

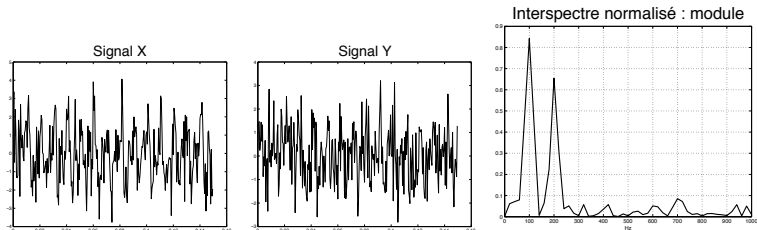
On considère deux signaux aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ conjointement stationnaires de fonction d'intercorrélation $R_{XY}(\tau)$. L'interspectre $S_{XY}(f)$ est par définition la T.F. de leur fonction d'intercorrélation $R_{XY}(\tau)$. L'interspectre mesure comment les variations communes aux deux processus aléatoire sont distribuées en fréquence.

- Signaux à temps continu – temps discret :

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

$$S_{XY}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XY}(k) e^{-j2\pi k f} \quad (\text{de période } 1) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad R_{XY}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_{XY}(f) e^{j2\pi k f} df$$

Interspectre : propriétés

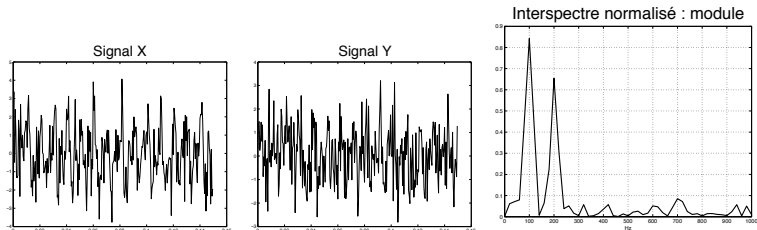


$$X(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + b(t), \quad Y(t) = 0.5 \cos(2\pi f_1 t - \frac{\pi}{4}) + 0.35 \sin(2\pi f_2 t - \frac{\pi}{2}) + b(t); \quad f_1 = 100 \text{ Hz et } f_2 = 200 \text{ Hz}.$$

• Propriétés :

- ▷ $S_X(f)$ et $S_Y(f)$: propriétés spectrales propres de X et Y .
- ▷ $S_{XY}(f)$: propriétés spectrales communes de X et Y = densité spectrale d'interaction de X et Y
- ▷ $S_{XY}(f)$ est généralement à valeurs complexes (car absence de symétrie de $R_{XY}(\tau)$).
- ▷ $S_{XY}(f) = S_{YX}^*(f)$. Pour les signaux réels : $S_{XY}(-f) = S_{XY}^*(f)$

Interspectre normalisé



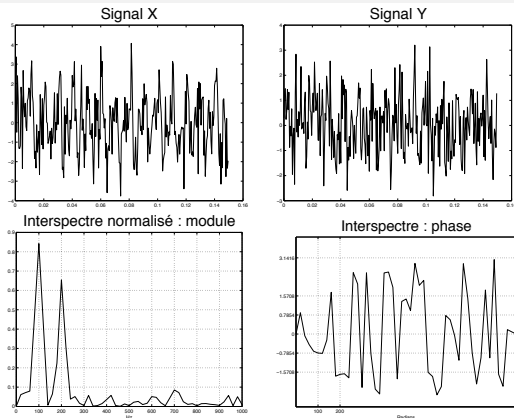
- Fonction de cohérence spectrale = interspectre normalisé

$$CS_{XY}(f) = \frac{S_{XY}(f)}{\sqrt{S_X(f)S_Y(f)}} \in \mathbb{C} \quad ; \quad 0 \leq |CS_{XY}(f)| \leq 1$$

- $CS_{XY}(f)$ mesure le degré de corrélation entre $X(t)$ et $Y(t)$ pour la fréquence f .
- Module
 - ▷ si $|CS_{XY}(f)| = 0$ $X(t)$ et $Y(t)$ sont décorrélés en f .
 - ▷ si $|CS_{XY}(f)| = 1$ $X(t)$ et $Y(t)$ sont totalement corrélés en f .
- Phase
 - ▷ $\angle CS_{XY}(f)$ significative si $|CS_{XY}(f)| > 0.5$.
 - ▷ $\angle CS_{XY}(f) = \angle S_{XY}(f)$ mesure le déphasage entre $X(t)$ et $Y(t)$ pour f .

En savoir plus : P. Granjon, Introduction à l'analyse interspectrale, ENSIEG.

Analyse de l'interspectre : exemple

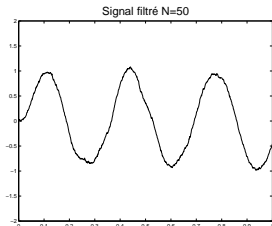
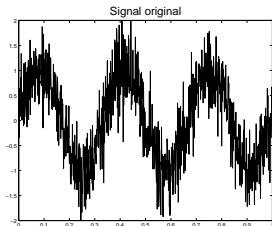


Utilisation de l'interspectre normalisé pour déterminer les fréquences corrélées dans deux signaux aléatoires, ainsi que leur déphasage (d'après : Mathworks Documentation Center)

$X(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + b(t)$, $Y(t) = 0.5 \cos(2\pi f_1 t - \frac{\pi}{4}) + 0.35 \sin(2\pi f_2 t - \frac{\pi}{2}) + b(t)$
avec $f_1 = 100$ Hz et $f_2 = 200$ Hz.

▷ On observe une forte corrélation sur l'interspectre normalisé ($|CS_{XY}(f)| > 0.5$) pour $f = 100$ Hz et $f = 200$ Hz.

▷ Pour ces mêmes fréquences, on lit un déphasage de $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$ entre X et Y sur la phase $\angle CS_{XY}(f)$.

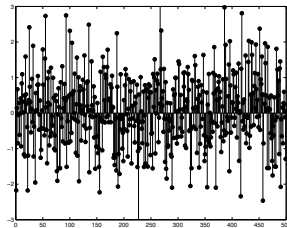
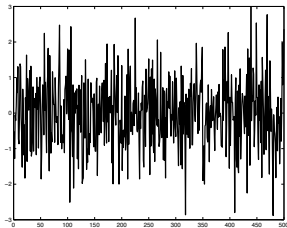


TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES

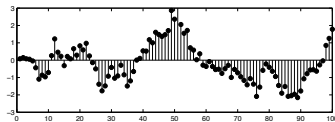
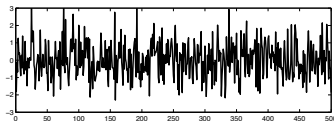
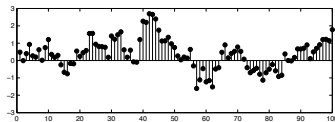
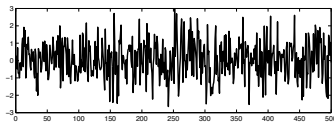
Partie 3

Partie 3

MODELES DE SIGNAUX ALEATOIRES ET BRUITS



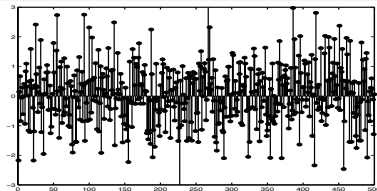
Processus aléatoires fondamentaux



Certains processus (ou suites) aléatoires jouent un rôle privilégié dans la représentation des signaux physiques et permettent de modéliser une vaste classe de phénomènes :

- **Le bruit blanc (continu ou discret)**
- **Le processus aléatoire gaussien**
- **Le processus de Poisson**
- Les processus markoviens, les chaînes de Markov
- Les processus AR, ARMA, ARIMA
- ...

Le bruit blanc discret



Le bruit blanc peut être défini dans le cas d'un processus à temps continu ou discret. Il est caractérisé par une décorrélation complète entre variables à des instants différents. Sa d.s.p. est constante (la puissance se répartit de façon uniforme sur l'ensemble des fréquences).

- Le bruit blanc discret : c'est une suite aléatoire $X(k)$ caractérisée par :

$$\mathbb{E}[X(k)] = 0$$

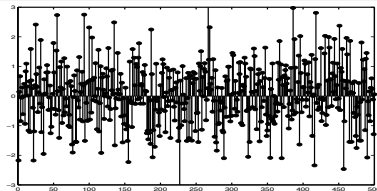
$$R_X(k) = \frac{N_0}{2} \delta(k) \quad \text{où } \delta(k) \text{ est l'impulsion unité}$$

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

Sa puissance (=variance) vaut :

$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[X(k)^2] = \sigma_X^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_X(f) df = \frac{N_0}{2}$$

Le bruit blanc discret



Le bruit blanc peut être défini dans le cas d'un processus à temps continu ou discret. Il est caractérisé par une décorrélation complète entre variables à des instants différents. Sa d.s.p. est constante (la puissance se répartit de façon uniforme sur l'ensemble des fréquences).

- **Le bruit blanc discret** : c'est une suite aléatoire $X(k)$ caractérisée par :

$$\mathbb{E}[X(k)] = 0$$

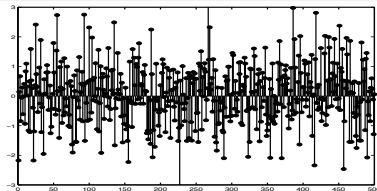
$$R_X(k) = \frac{N_0}{2} \delta(k) \quad \text{où } \delta(k) \text{ est l'impulsion unité}$$

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

Sa puissance (=variance) vaut :

$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[X(k)^2] = \sigma_X^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_X(f) df = \frac{N_0}{2}$$

Le bruit blanc discret



Le bruit blanc peut être défini dans le cas d'un processus à temps continu ou discret. Il est caractérisé par une décorrélation complète entre variables à des instants différents. Sa d.s.p. est constante (la puissance se répartit de façon uniforme sur l'ensemble des fréquences).

- **Le bruit blanc discret** : c'est une suite aléatoire $X(k)$ caractérisée par :

$$\mathbb{E}[X(k)] = 0$$

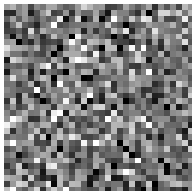
$$R_X(k) = \frac{N_0}{2} \delta(k) \quad \text{où } \delta(k) \text{ est l'impulsion unité}$$

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

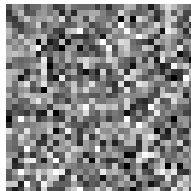
Sa puissance (=variance) vaut :

$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[X(k)^2] = \sigma_X^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_X(f) df = \frac{N_0}{2}$$

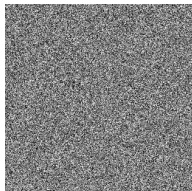
Le bruit blanc discret 2D



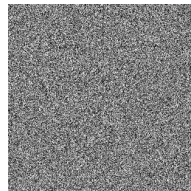
a



b



c

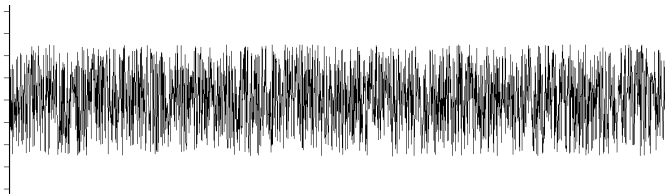


d

a) et b) : réalisations de 32×32 échantillons

c) et d) : réalisations de 256×256 échantillons

Le bruit blanc continu (théorique)



CC R. Frey

- C'est un processus aléatoire à temps continu caractérisé par :

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0$$

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad \text{où } \delta(\tau) \text{ est l'impulsion de Dirac}$$

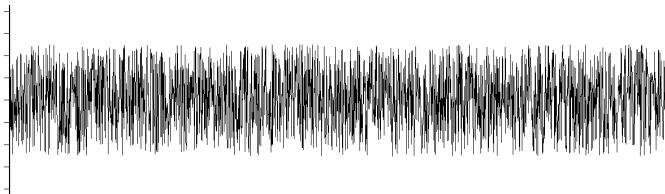
$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

Sa puissance (=variance) vaut :

$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[X(t)^2] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = +\infty$$

Un tel processus, entièrement décorrélé, n'a pas de réalité physique car $P_X = +\infty$. En pratique les bruits blancs physiques ont une d.s.p. constante uniquement dans une certaine bande de fréquence et sont donc de puissance finie.

Le bruit blanc continu (théorique)



CC R. Frey

- C'est un processus aléatoire à temps continu caractérisé par :

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0$$

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad \text{où } \delta(\tau) \text{ est l'impulsion de Dirac}$$

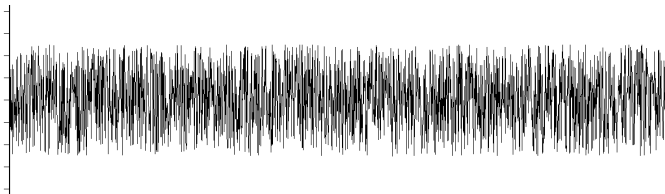
$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

Sa puissance (=variance) vaut :

$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[X(t)^2] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = +\infty$$

Un tel processus, entièrement décorrélé, n'a pas de réalité physique car $P_X = +\infty$. En pratique les bruits blancs physiques ont une d.s.p. constante uniquement dans une certaine bande de fréquence et sont donc de puissance finie.

Le bruit blanc continu (théorique)



CC R. Frey

- C'est un processus aléatoire à temps continu caractérisé par :

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0$$

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad \text{où } \delta(\tau) \text{ est l'impulsion de Dirac}$$

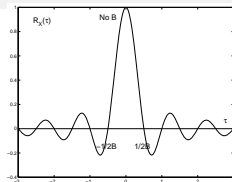
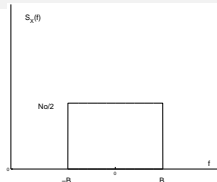
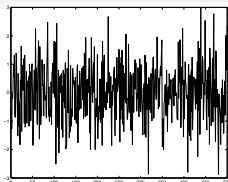
$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

Sa puissance (=variance) vaut :

$$P_X = R_X(0) = \mathbb{E}[X(t)^2] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = +\infty$$

Un tel processus, entièrement décorrélé, n'a pas de réalité physique car $P_X = +\infty$. En pratique les bruits blancs physiques ont une d.s.p. constante uniquement dans une certaine bande de fréquence et sont donc de puissance finie.

Le bruit « blanc » physique



Le bruit blanc continu n'a pas de réalité physique. Un bruit physique pourra être considéré comme étant un bruit « blanc » si sa d.s.p. est constante dans une bande de fréquence suffisamment large pour couvrir la bande passante du système de traitement du signal. Un tel bruit est forcément corrélé.

- Un tel bruit a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} S_X(f) &= \frac{N_0}{2} & \text{si } f \in [-B, B] \\ S_X(f) &= 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

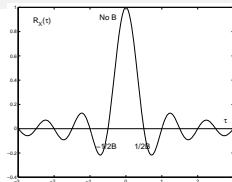
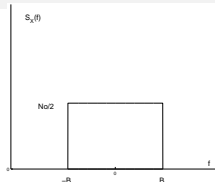
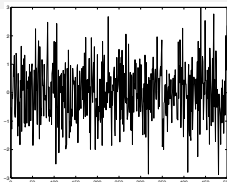
$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)\right] = N_0 B \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau}$$

- Sa puissance (finie) est égale à :

$$P_X = R_X(0) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = N_0 B$$

- Quand $B \rightarrow +\infty$, $R_X(\tau) \rightarrow \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$. On retrouve le bruit blanc théorique.

Le bruit « blanc » physique



Le bruit blanc continu n'a pas de réalité physique. Un bruit physique pourra être considéré comme étant un bruit « blanc » si sa d.s.p. est constante dans une bande de fréquence suffisamment large pour couvrir la bande passante du système de traitement du signal. Un tel bruit est forcément corrélé.

- Un tel bruit a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} S_X(f) &= \frac{N_0}{2} & \text{si } f \in [-B, B] \\ S_X(f) &= 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

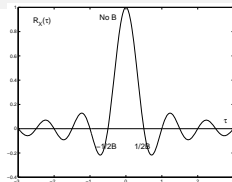
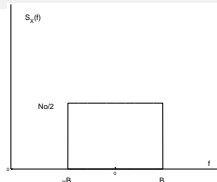
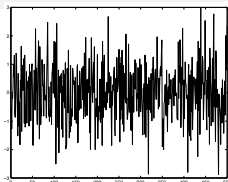
$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)\right] = N_0 B \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau}$$

- Sa puissance (finie) est égale à :

$$P_X = R_X(0) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = N_0 B$$

- Quand $B \rightarrow +\infty$ $R_X(\tau) \rightarrow \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$. On retrouve le bruit blanc théorique.

Le bruit « blanc » physique



Le bruit blanc continu n'a pas de réalité physique. Un bruit physique pourra être considéré comme étant un bruit « blanc » si sa d.s.p. est constante dans une bande de fréquence suffisamment large pour couvrir la bande passante du système de traitement du signal. Un tel bruit est forcément corrélé.

- Un tel bruit a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} S_X(f) &= \frac{N_0}{2} & \text{si } f \in [-B, B] \\ S_X(f) &= 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

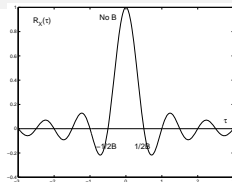
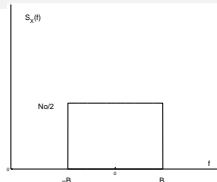
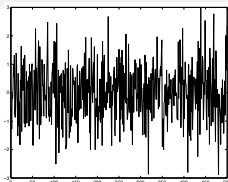
$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)\right] = N_0 B \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau}$$

- Sa puissance (finie) est égale à :

$$P_X = R_X(0) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = N_0 B$$

- Quand $B \rightarrow +\infty$ $R_X(\tau) \rightarrow \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$. On retrouve le bruit blanc théorique.

Le bruit « blanc » physique



Le bruit blanc continu n'a pas de réalité physique. Un bruit physique pourra être considéré comme étant un bruit « blanc » si sa d.s.p. est constante dans une bande de fréquence suffisamment large pour couvrir la bande passante du système de traitement du signal. Un tel bruit est forcément corrélé.

- Un tel bruit a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} S_X(f) &= \frac{N_0}{2} & \text{si } f \in [-B, B] \\ S_X(f) &= 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

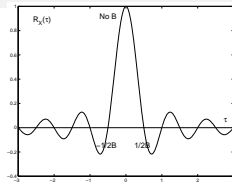
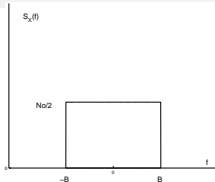
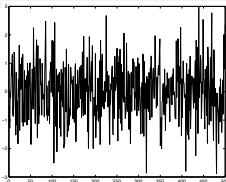
$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)\right] = N_0 B \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau}$$

- Sa puissance (finie) est égale à :

$$P_X = R_X(0) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = N_0 B$$

- Quand $B \rightarrow +\infty$ $R_X(\tau) \rightarrow \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$. On retrouve le bruit blanc théorique.

Le bruit « blanc » physique



Le bruit blanc continu n'a pas de réalité physique. Un bruit physique pourra être considéré comme étant un bruit « blanc » si sa d.s.p. est constante dans une bande de fréquence suffisamment large pour couvrir la bande passante du système de traitement du signal. Un tel bruit est forcément corrélé.

- Un tel bruit a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} S_X(f) &= \frac{N_0}{2} & \text{si } f \in [-B, B] \\ S_X(f) &= 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

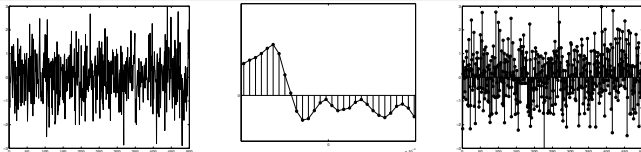
$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)\right] = N_0 B \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}$$

- Sa puissance (finie) est égale à :

$$P_X = R_X(0) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = N_0 B$$

- Quand $B \rightarrow +\infty$ $R_X(\tau) \rightarrow \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$. On retrouve le bruit blanc théorique.

Relation entre bruit blanc physique et bruit blanc discret



Lorsque l'on échantillonne un bruit blanc physique de bande limitée à $[-B, B]$ à la fréquence de Shannon $f_e = 2B$ on obtient un bruit blanc discret. Les relations sont les suivantes :

- Bruit blanc physique :

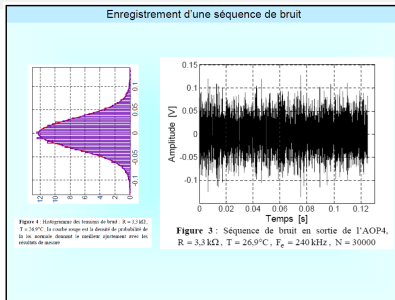
$$\begin{cases} S_X(f) = \frac{N_0}{2} & \text{si } f \in [-B, B] \\ S_X(f) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad R_X(\tau) = N_0 B \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau} \quad P_X = \sigma_X^2 = N_0 B$$

- Bruit blanc discret résultant :

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2} \quad R_X(k) = \frac{N_0}{2} \delta(k) \quad P_X = \sigma_X^2 = \frac{N_0}{2}$$

Démonstration : cf. Annexe « Échantillonnage des signaux aléatoires »

Le bruit blanc gaussien I



d'après G. Couturier GEII-IUT Bordeaux1, Bruit en électronique

- C'est un bruit blanc continu (ou discret) pour lequel $X(t)$ (ou $X(k)$) suit une loi gaussienne :

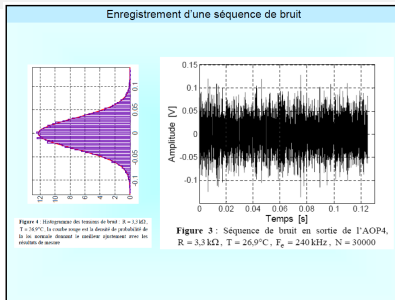
$$\triangleright \text{Cas continu : } f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec $\sigma^2 = N_0 B$ si le bruit physique est blanc dans la bande $[-B, +B]$.

$$\triangleright \text{Cas discret : } f_{X(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

Le bruit blanc gaussien I



d'après G. Couturier GEII-IUT Bordeaux1, Bruit en électronique

- C'est un bruit blanc continu (ou discret) pour lequel $X(t)$ (ou $X(k)$) suit une loi gaussienne :

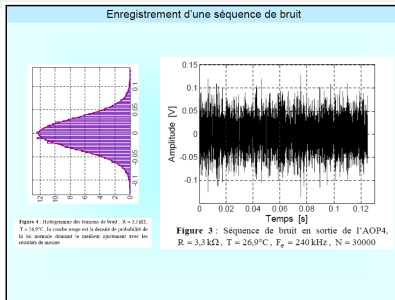
$$\triangleright \text{Cas continu : } f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec $\sigma^2 = N_0 B$ si le bruit physique est blanc dans la bande $[-B, +B]$.

$$\triangleright \text{Cas discret : } f_{X(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

Le bruit blanc gaussien I



d'après G. Couturier GEII-IUT Bordeaux1, Bruit en électronique

- C'est un bruit blanc continu (ou discret) pour lequel $X(t)$ (ou $X(k)$) suit une loi gaussienne :

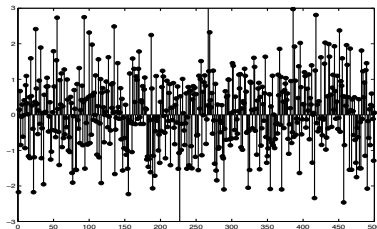
$$\triangleright \text{Cas continu : } f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec $\sigma^2 = N_0 B$ si le bruit physique est blanc dans la bande $[-B, +B]$.

$$\triangleright \text{Cas discret : } f_{X(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

avec $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

Le bruit blanc gaussien II

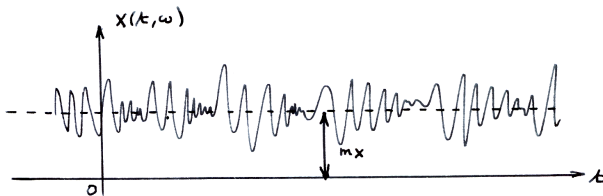


- Propriété importante (cas discret) :

Les variables aléatoires $X(k_1)$ et $X(k_2)$ pour $k_1 \neq k_2$ sont décorrélées (bruit blanc) donc indépendantes (car gaussiennes). Il en résulte :

$$\begin{aligned} & f_{X(k_1)X(k_2)\dots X(k_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X(k_i)}(x_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Le bruit blanc non centré



- C'est un bruit blanc X de valeur moyenne m_X non nulle : $X = \text{bruit blanc centré} + m_X$

▷ Cas continu : $\mathbb{E}[X(t)] = m_X$

$$C_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) ; \quad R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) + m_X^2$$

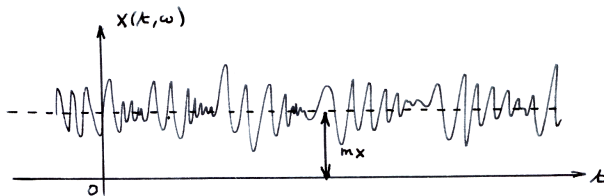
$$S_X(f) = \frac{N_0}{2} + m_X^2 \delta(f)$$

▷ Cas discret : $\mathbb{E}[X(k)] = m_X$

$$C_X(k) = \frac{N_0}{2} \delta(k) ; \quad R_X(k) = \frac{N_0}{2} \delta(k) + m_X^2$$

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2} + m_X^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k)$$

Le bruit blanc non centré



- C'est un bruit blanc X de valeur moyenne m_X non nulle : $X = \text{bruit blanc centré} + m_X$

▷ Cas continu : $\mathbb{E}[X(t)] = m_X$

$$C_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) ; \quad R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) + m_X^2$$

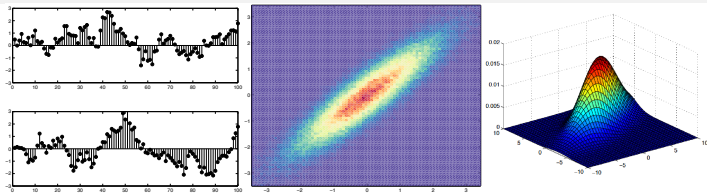
$$S_X(f) = \frac{N_0}{2} + m_X^2 \delta(f)$$

▷ Cas discret : $\mathbb{E}[X(k)] = m_X$

$$C_X(k) = \frac{N_0}{2} \delta(k) ; \quad R_X(k) = \frac{N_0}{2} \delta(k) + m_X^2$$

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2} + m_X^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k)$$

Les processus gaussiens I : cas général (non stationnaire)



- Processus aléatoire réel à temps continu (ou discret), éventuellement non stationnaire, $X(t, \omega)$, $t \in \mathbb{R}$ ou $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall n, \forall t_1, t_2, \dots, t_n, (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ est conjointement gaussien. La densité d'ordre n de X est une loi normale multidimensionnelle :

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det C)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - M)^T C^{-1} (x - M) \right\}$$

où :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

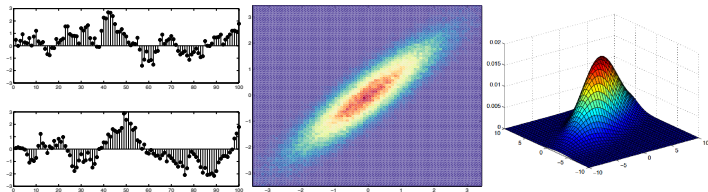
$$M = (m_X(t_1), m_X(t_2), \dots, m_X(t_n))^T$$

est le vecteur des moyennes à chaque instant,

$$(C)_{i,j} = R_X(t_i, t_j) - m_X(t_i)m_X(t_j)$$

est la matrice d'autocovariance du signal

Les processus gaussiens II : cas stationnaire



$$f_{\mathbf{X}(t_1), \mathbf{X}(t_2), \dots, \mathbf{X}(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det C)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - M)^T C^{-1} (x - M) \right\}$$

- Si le processus est stationnaire :

$$M = (m_{\mathbf{X}}, m_{\mathbf{X}}, \dots, m_{\mathbf{X}})^T$$

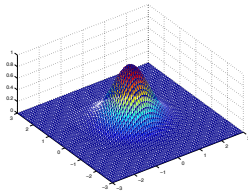
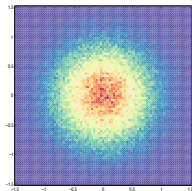
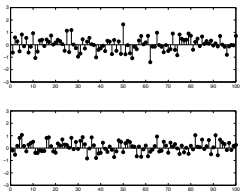
$$(C)_{i,j} = R_{\mathbf{X}}(t_i - t_j) - m_{\mathbf{X}}^2$$

C est une matrice symétrique (définie positive).

$m_{\mathbf{X}}$ est constante et $R_{\mathbf{X}}$ ne dépend que de $\tau = t_i - t_j$.

- Un processus gaussien stationnaire est entièrement caractérisé par sa moyenne $m_{\mathbf{X}}$ et par sa fonction d'autocorrélation $R_{\mathbf{X}}(\tau)$, dont on peut déduire la densité de probabilité d'ordre n .

Les processus gaussiens III : cas stationnaire et décorrélé



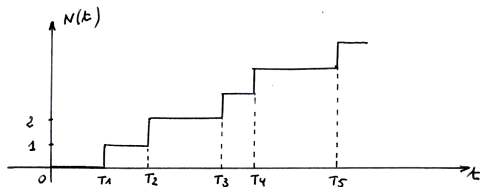
- Lorsque les variables aléatoires $X(t_i)$ et $X(t_j)$ sont **décorrélées** pour $t_i \neq t_j$, elles sont également **indépendantes**. X est alors un bruit blanc gaussien qui vérifie :

$$\begin{cases} (C)_{i,j} &= 0 \quad i \neq j \\ (C)_{i,i} &= \sigma_X^2 \end{cases}$$

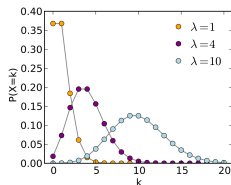
$$\begin{aligned} & f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X(t_i)}(x_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma^2)^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_X)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- **Propriété importante** : toute transformation linéaire sur un processus gaussien donne encore un processus gaussien. C'est le cas en particulier du filtrage.

Processus de Poisson I



Processus de Poisson



Loi de Poisson

C'est un processus de comptage utile dans de nombreux problèmes faisant intervenir des événements aléatoirement répartis dans le temps. Il consiste à distribuer des points aléatoires T_i sur la droite des temps suivant une loi de Poisson et à incrémenter un compteur $N(t)$ au passage de chaque point. Le nombre moyen de points / unité de temps est λ .

- Les instants aléatoires T_i ont les propriétés suivantes :

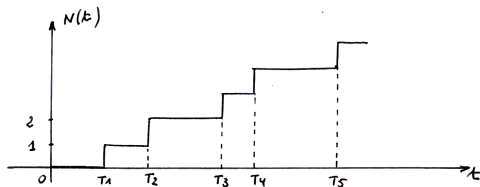
$[P_1]$ $T_{n+1} > T_n$.

$[P_2]$ Le nombre de points $n(t_1, t_2)$ dans un intervalle temporel quelconque $[t_1, t_2]$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$:

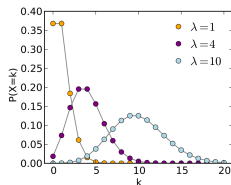
$$P\{n(t_1, t_2) = k\} = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^k}{k!} \quad T = t_2 - t_1$$

$[P_3]$ Si les intervalles $[t_1, t_2]$ et $[t_3, t_4]$ sont disjoints, les variables aléatoires $n(t_1, t_2)$ et $n(t_3, t_4)$ sont indépendantes.

Processus de Poisson I



Processus de Poisson



Loi de Poisson

C'est un processus de comptage utile dans de nombreux problèmes faisant intervenir des événements aléatoirement répartis dans le temps. Il consiste à distribuer des points aléatoires T_i sur la droite des temps suivant une loi de Poisson et à incrémenter un compteur $N(t)$ au passage de chaque point. Le nombre moyen de points / unité de temps est λ .

- Les instants aléatoires T_i ont les propriétés suivantes :

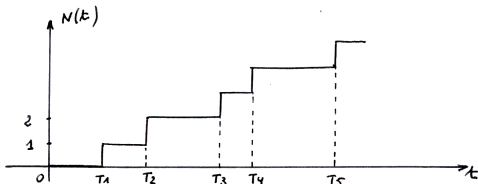
$[P_1]$ $T_{n+1} > T_n$.

$[P_2]$ Le nombre de points $n(t_1, t_2)$ dans un intervalle temporel quelconque $[t_1, t_2]$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$:

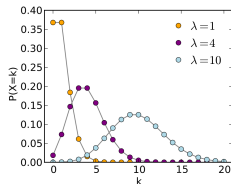
$$P\{n(t_1, t_2) = k\} = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^k}{k!} \quad T = t_2 - t_1$$

$[P_3]$ Si les intervalles $[t_1, t_2]$ et $[t_3, t_4]$ sont disjoints, les variables aléatoires $n(t_1, t_2)$ et $n(t_3, t_4)$ sont indépendantes.

Processus de Poisson II



Processus de Poisson



Loi de Poisson

- Le processus de Poisson (temps continu, valeurs discrètes) est défini par :

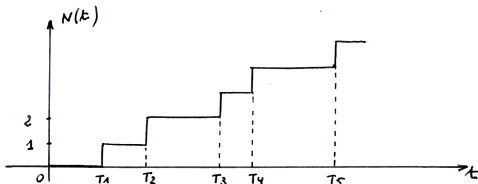
$$N(0) = 0$$

$$N(t) = n(0, t) = \sum_{n \geq 1} u(t - T_n)$$

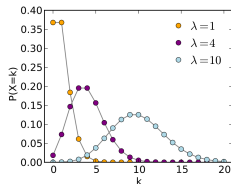
où $u(t)$ est l'échelon unité.

- Caractéristiques : processus non stationnaire !
 - ▶ $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt ;
 - ▶ $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$
 - ▶ $\sigma_N^2(t) = \mathbb{E}[(N(t) - \mathbb{E}[N(t)])^2] = \lambda t$
 - ▶ $R_N(t_1, t_2) = \mathbb{E}[N(t_1)N(t_2)] = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$

Processus de Poisson II



Processus de Poisson



Loi de Poisson

- Le processus de Poisson (temps continu, valeurs discrètes) est défini par :

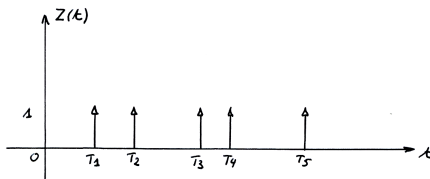
$$N(0) = 0$$

$$N(t) = n(0, t) = \sum_{n \geq 1} u(t - T_n)$$

où $u(t)$ est l'échelon unité.

- Caractéristiques : processus non stationnaire !
 - ▶ $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt ;
 - ▶ $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$
 - ▶ $\sigma_N^2(t) = \mathbb{E}[(N(t) - \mathbb{E}[N(t)])^2] = \lambda t$
 - ▶ $R_N(t_1, t_2) = \mathbb{E}[N(t_1)N(t_2)] = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$

Impulsions de Poisson



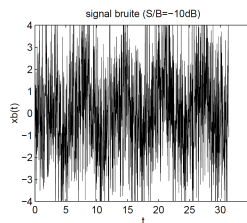
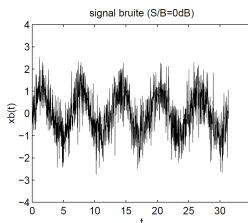
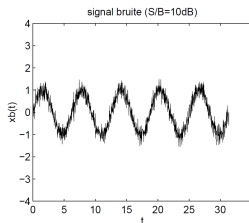
C'est la *dérivée* du processus de comptage précédent :

$$Z(t) = \frac{dN(t)}{dt} = \sum_{n \geq 1} \delta(t - T_n)$$

- C'est un processus stationnaire !
- $\mathbb{E}[Z(t)] = \lambda$
- $R_Z(\tau) = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau)$
- $S_Z(f) = \lambda^2 \delta(f) + \lambda$

La densité spectrale de puissance $S_Z(f)$ est celle d'un bruit blanc de valeur moyenne non nulle λ .

Le bruit et la mesure en physique



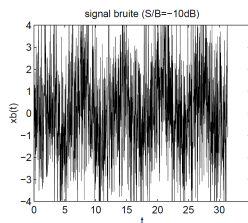
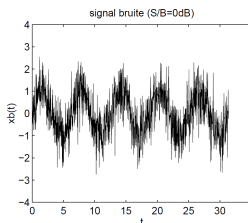
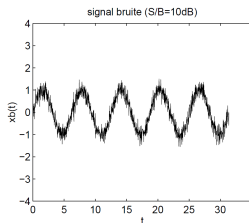
Les instruments physiques idéaux, c'est-à-dire sans bruit, n'existent pas. Le constructeur s'appliquera néanmoins à réaliser un matériel proche de l'idéal (notion de "classe").

Dans ce but, il est nécessaire d'étudier les sources possibles de bruit et de modéliser ces sources comme génératrices d'un signal stochastique.

Le bruit peut être d'origine extérieure ou intérieure à l'instrument de mesure. Comme bruits extérieurs on peut distinguer les bruits d'origine naturelle ou artificielle.

Les bruits non périodiques sont généralement considérés comme des signaux aléatoires stationnaires, ergodiques, centrés (et souvent gaussiens, en vertu du théorème de la limite centrale).

Le bruit et la mesure en physique



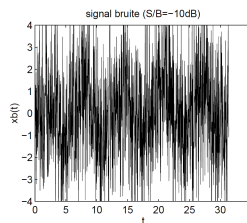
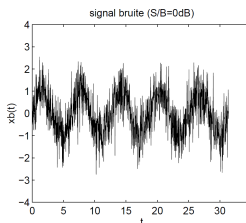
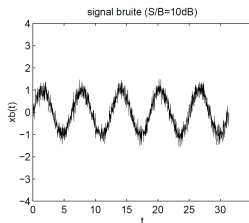
Les instruments physiques idéaux, c'est-à-dire sans bruit, n'existent pas. Le constructeur s'appliquera néanmoins à réaliser un matériel proche de l'idéal (notion de "classe").

Dans ce but, il est nécessaire d'étudier les sources possibles de bruit et de modéliser ces sources comme génératrices d'un signal stochastique.

Le bruit peut être d'origine extérieure ou intérieure à l'instrument de mesure. Comme bruits extérieurs on peut distinguer les bruits d'origine naturelle ou artificielle.

Les bruits non périodiques sont généralement considérés comme des signaux aléatoires stationnaires, ergodiques, centrés (et souvent gaussiens, en vertu du théorème de la limite centrale).

Le bruit et la mesure en physique



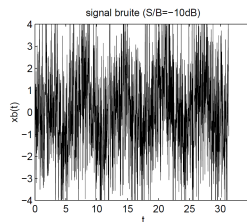
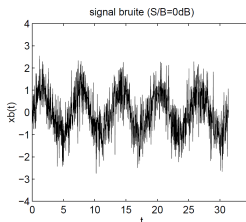
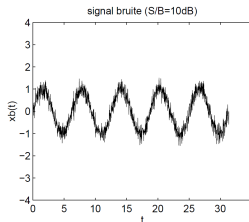
Les instruments physiques idéaux, c'est-à-dire sans bruit, n'existent pas. Le constructeur s'appliquera néanmoins à réaliser un matériel proche de l'idéal (notion de "classe").

Dans ce but, il est nécessaire d'étudier les sources possibles de bruit et de modéliser ces sources comme génératrices d'un signal stochastique.

Le bruit peut être d'origine extérieure ou intérieure à l'instrument de mesure. Comme bruits extérieurs on peut distinguer les bruits d'origine naturelle ou artificielle.

Les bruits non périodiques sont généralement considérés comme des signaux aléatoires stationnaires, ergodiques, centrés (et souvent gaussiens, en vertu du théorème de la limite centrale).

Rapport signal à bruit

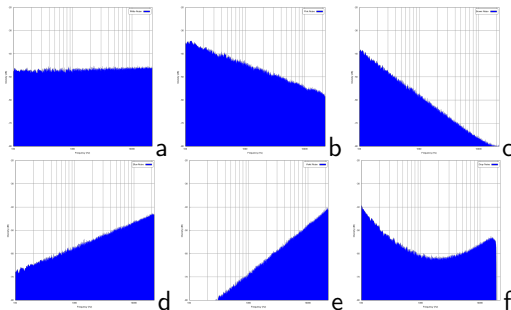


Le rapport signal à bruit S/B ("Signal-to-Noise-Ratio", SNR), est un indicateur fondamental du niveau de bruit sur un signal bruité. C'est le rapport de la puissance du signal P_S sur la puissance du bruit seul P_B (en l'absence de signal). Il est souvent exprimé en dB :

$$(S/B)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_S}{P_B}$$

Ce rapport résume l'effet de l'ensemble des bruits venant dégrader le signal utile.

Différents spectres de bruit



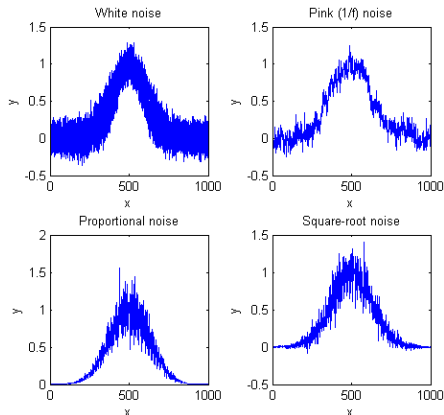
Bruit blanc et bruits colorés : densités spectrales de puissance (échelle log-log)

- (a) Bruit blanc ($dsp = Cte$). (b) Bruit rose (dsp en $\frac{1}{f}$). (c) Bruit rouge ou brownien (dsp en $\frac{1}{f^2}$).
(d) Bruit bleu (dsp en f). (e) Bruit violet (dsp en f^2). (f) Bruit gris.

Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Bruits_colorés

- Tous les bruits ne sont pas des bruits blancs (densité spectrale = constante). On rencontre fréquemment des bruits « colorés » avec des densités spectrales de puissance variables.
- Tous les bruits ne sont pas gaussiens : ils peuvent avoir des distributions (d'ordre 1) gaussiennes, poissonniennes, uniformes, etc.

Signal et bruit

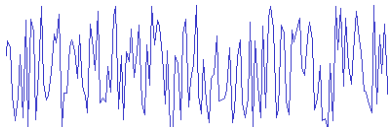


Différents types de bruits additifs (source : T. O'Haver, Univ. Maryland)

(a) Bruit blanc, indépendant du signal. (b) Bruit rose (bruit en $\frac{1}{f}$). (c) Bruit blanc proportionnel au signal. (d) Bruit blanc proportionnel à la racine carrée du signal.

- Le bruit peut-être dépendant ou indépendant du niveau du signal.
- Le bruit peut-être additif ou multiplicatif...

Le bruit de Johnson (bruit thermique) I



Au-dessus du zéro absolu, les électrons sont soumis à l'agitation thermique. Aux bornes d'une résistance, ces fluctuations de charge se traduisent donc par une fluctuation de la tension électrique. C'est le bruit de Johnson.

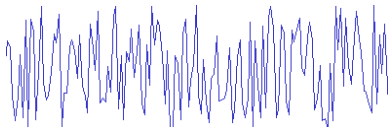
- Densité spectrale de puissance :

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \frac{1}{2} \frac{h |f|}{\exp\left(\frac{h |f|}{k T}\right) - 1} \\ &\simeq \frac{1}{2} k T \quad (h |f| \ll k T) \end{aligned}$$

où : $h \simeq 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ (Cte de Planck) $k \simeq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ (Cte de Boltzmann)

- La densité de probabilité du bruit thermique est gaussienne.
- Amplitude du bruit thermique : de l'ordre du μV .

Le bruit de Johnson (bruit thermique) I



Au-dessus du zéro absolu, les électrons sont soumis à l'agitation thermique. Aux bornes d'une résistance, ces fluctuations de charge se traduisent donc par une fluctuation de la tension électrique. C'est le bruit de Johnson.

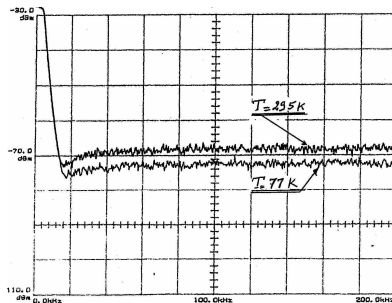
- Densité spectrale de puissance :

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \frac{1}{2} \frac{h |f|}{\exp\left(\frac{h |f|}{k T}\right) - 1} \\ &\simeq \frac{1}{2} k T \quad (h |f| \ll k T) \end{aligned}$$

où : $h \simeq 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ (Cte de Planck) $k \simeq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ (Cte de Boltzmann)

- La densité de probabilité du bruit thermique est gaussienne.
- Amplitude du bruit thermique : de l'ordre du μV .

Le bruit de Johnson (bruit thermique) II



D.S.P. du bruit thermique à $T = 77\text{ K}$ et $T = 295\text{ K}$, $R = 1\Omega$

(d'après L. Jacobowicz, J.F. Roch, J.P. Poizat et P. Grangier)

- C'est donc un bruit blanc, de puissance dans la bande $[-B, +B]$:

$$P_X = k T B$$

L'agitation thermique engendre ainsi aux bornes d'une résistance R une tension aléatoire u de puissance moyenne $\overline{u^2}/R = k T B$ soit : $\overline{u^2} = k T B R$.

Mesure de la constante de Boltzmann

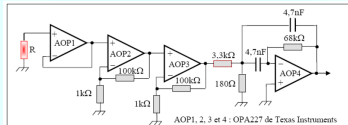


Figure 1: Montage utilisé pour la détermination de la constante de Boltzmann. Les alimentations et les réglages d'offset ne sont représentés

$$\left(k + \frac{2\gamma\sqrt{e_n(f)}i_n(f)}{4T} \right) = (1.52 \pm 0.08) 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

Enregistrement d'une séquence de bruit

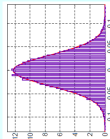


Figure 4 : Histogramme des bruits de fond. $R = 3.3 \text{ k}\Omega$, $T = 26.9^\circ\text{C}$. La courbe orange est la densité de probabilité de la loi normale obtenue par méthode graphique avec les résultats de mesure

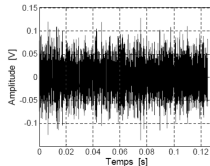
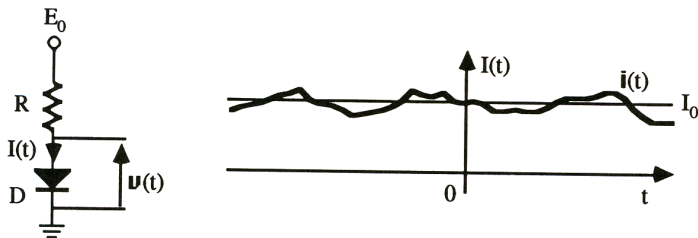


Figure 3 : Séquence de bruit en sortie de l'AOP4, $R = 3.3 \text{ k}\Omega$, $T = 26.9^\circ\text{C}$, $F_p = 240 \text{ kHz}$, $N = 30000$

d'après G. Couturier GEII-IUT Bordeaux1, Bruit en électronique

Le bruit de grenaille en électronique I



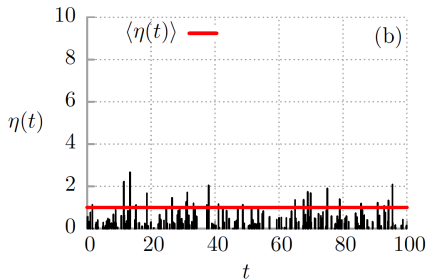
Courant de fluctuation d'une diode passante

(extrait de : M. et F. Biquard, *Signaux et systèmes en électronique*, Ellipses)

Le bruit de grenaille ("shot noise" en anglais) est observé dans tous les composants électroniques sous tension (diodes, tubes à vide, etc.). Il est engendré par la fluctuation du nombre de porteurs de charges qui traversent la barrière de potentiel à des instants aléatoires, selon une loi de Poisson. Le bruit de grenaille n'existe pas en l'absence de courant excitateur.

Le bruit de grenaille est un bruit blanc non centré, de distribution gaussienne.

Le bruit de grenaille II : modèle théorique



Modèle théorique du bruit de grenaille (shot noise)

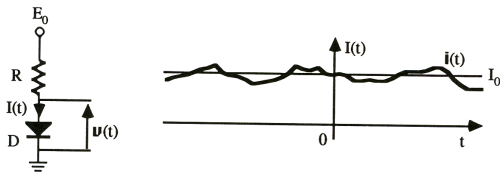
(J. Spiechowicz, J. Luczka, P. Hänggi, *Absolute negative mobility induced by white Poissonian noise*, arXiv :1211.5971v2)

- Dans un composant électronique, si les porteurs de charges sont indépendants, leur nombre $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt et le courant résultant peut être considéré comme un processus aléatoire $i(t)$ dérivé du processus de Poisson $N(t)$:

$$q(t) = N(t)e \quad \Rightarrow \quad i(t) = e \frac{dN(t)}{dt} = e \sum_{n \geq 1} \delta(t - T_n)$$

où $e = 1,61 \cdot 10^{-19}$ C et T_n sont des instants de Poisson.

Le bruit de grenaille III



Courant de fluctuation d'une diode passante

(extrait de : M. et F. Biquard, **Signaux et systèmes en électronique**, Ellipses)

● Propriétés :

- ▶ $\mathbb{E}[i(t)] = e \lambda = I_0$ (intensité moyenne traversant le dispositif) ;
- ▶ fonction d'autocorrélation :

$$R_i(\tau) = e^2[\lambda^2 + \lambda\delta(\tau)] = I_0^2 + e I_0 \delta(\tau)$$

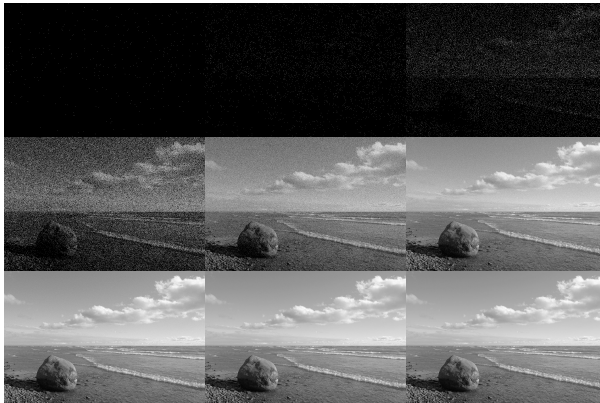
- ▶ d.s.p. :

$$S_i(f) = I_0^2 \delta(f) + e I_0$$

qui correspond à un bruit blanc continu de moyenne I_0 .

- ▶ Densité d'ordre 1 : gaussienne de moyenne I_0 .

Le bruit de photons en optique I

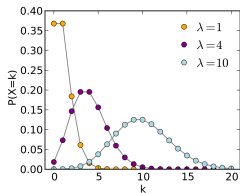


Bruit de photons dans la formation d'une image photographique. CC : Eric Bajart

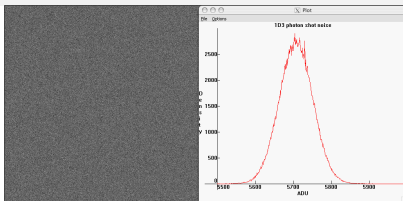
Nbre moyen de photons / pixels = 0.001, 0.01, 0.1 || 1, 10, 100 || 1000, 10000 et 100000.

- Le bruit poissonien existe également en optique : c'est le bruit de photons. On l'observe dans tous les systèmes d'imagerie à détection de photons. Il est lié directement à la nature corpusculaire de la lumière et à l'émission aléatoire du flux de photons par les atomes excités de la source. C'est un bruit blanc de distribution poissonnienne.

Le bruit de photons en optique II



Loi de Poisson



Bruit photonique de densité poissonnienne \simeq gaussienne

(Source : E. Martinec, Univ. Chicago, appareil photo : Canon 1D Mark III)

- Le nombre de photons $N(t)$ reçus par un photodétecteur pendant un temps t est aléatoire. Il suit une loi de Poisson de paramètre λt où λ est le nombre moyen de photons reçus par unité de temps :

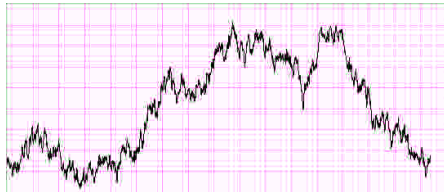
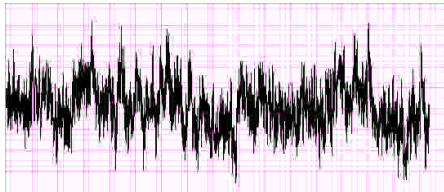
$$P\{N(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

- Lorsque λt est grand ($\lambda t > 10$), la loi de Poisson peut être approchée, avec une excellente précision, par une loi gaussienne : $N(t) \sim \mathcal{N}(\lambda t, \lambda t)$:

$$P\{N(t) = k\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda t}} \exp\left\{-\frac{(k - \lambda t)^2}{2\lambda t}\right\}$$

- Le signal est proportionnel au compte de photons $N(t)$ moyen : λt et le bruit a un écart type : $\sqrt{\lambda t}$. On a ici un exemple de bruit qui dépend du signal. Le rapport signal sur bruit est : $\frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} = \sqrt{\lambda t}$. Il peut être augmenté en augmentant l'intensité de la source ($\lambda \nearrow$) et le temps d'intégration ($t \nearrow$).

Le bruit de scintillation



Bruits en $1/|f|^\alpha$ avec $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ (abscisse : temps t)

(extrait de : 1/f noise : a pedagogical review. E. Milotti)

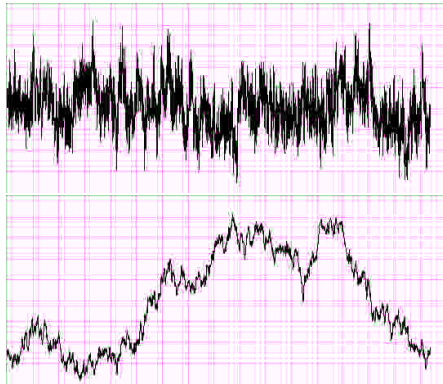
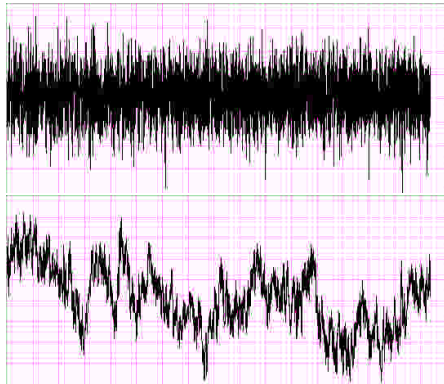
Le bruit de scintillation ("flicker noise" ou bruit rose / rouge) est un bruit basse fréquence dont la densité spectrale de puissance $S_X(f)$ varie en $1/|f|^\alpha$ avec $1 < \alpha < 3$.

Présent dans de nombreux phénomènes physiques, son origine reste mal expliquée.

En électronique on observe expérimentalement ce bruit pour des fréquences inférieures au kHz . Sa distribution peut être considérée comme gaussienne.

On peut s'en affranchir, lorsque l'on cherche à mesurer un signal basse-fréquence, en le transposant dans les hautes fréquences par modulation (principe de la "détection synchrone").

Le bruit de scintillation



Bruits en $1/|f|^\alpha$ avec $\alpha = 0$ = bruit blanc, $\alpha = 1$, $\alpha = 1.5$, $\alpha = 2$ (abscisse : temps t)

(extrait de : $1/f$ noise : a pedagogical review. E. Milotti)

On remarquera le caractère fractal de ces réalisations (auto-similarité).

Le bruit de scintillation

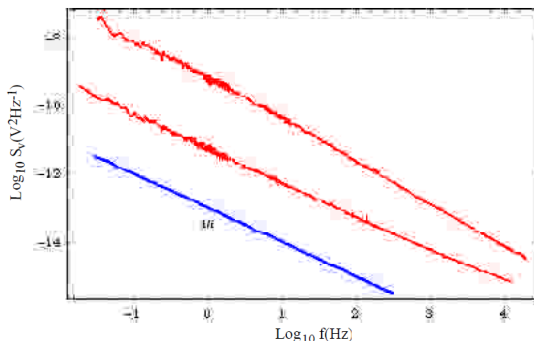


Figure 7. This figure shows the spectral densities of voltage fluctuations measured in two thin-film resistors by Pellegrini, Saletti, Terreni and Prudenziati [15]. They are very close to a perfect $1/f$ noise, the behavior extends over more than 6 frequency decades and there seems to be no noise power flattening at low frequency.

D.S.P. d'un bruit en $1/f$. Résistance réalisée en couche mince

(extrait de : $1/f$ noise : a pedagogical review. E. Milotti)

Le bruit de scintillation

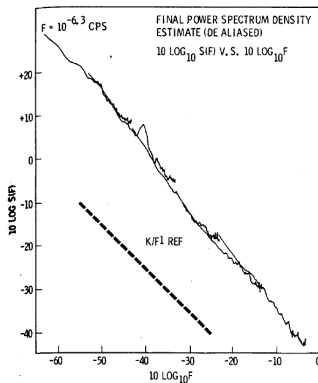
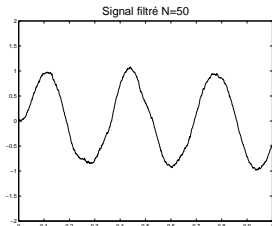
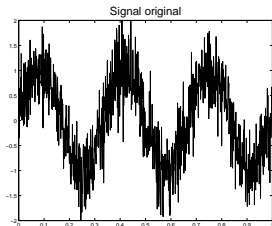


Figure 8: Caloyannides [16] took data for three months on an array of operational amplifiers, and measured a $1/f^{1.23}$ spectrum down to $10^{-6.3}$ Hz.

D.S.P. d'un bruit en $1/f^{1.23}$. Amplificateur opérationnel

(extrait de : $1/f$ noise : a pedagogical review. E. Milotti)

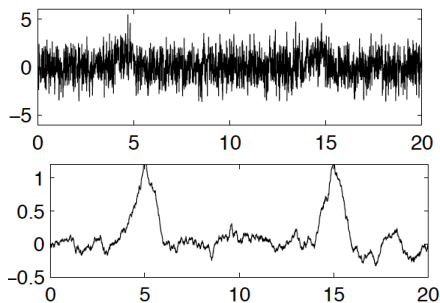


TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES

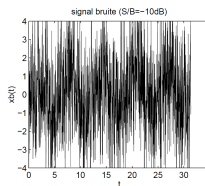
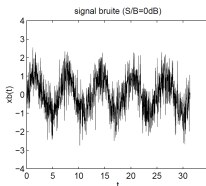
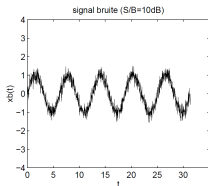
Partie 4

Partie 4

DETECTION DE SIGNAUX BRUITES



Applications de la corrélation : détection I



Détection de signaux noyés dans le bruit

Cas 1 : signal périodique inconnu de période inconnue.

$x(t)$: signal périodique de période inconnue T_0 .

$y(t) = x(t) + b(t)$: signal bruité observé

où $b(t)$ est un bruit blanc "physique" décorrélé avec le signal
 $\mathbb{E}[b(t)] = 0$;
si $|\tau| > \tau_M$, $R_b(\tau) = 0$; $b(t)$ est stationnaire et ergodique.

Applications de la corrélation : détection I

Principe de la détection : calcul de l'autocorrélation temporelle du signal bruité :

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

$$\text{signal présent} : \text{ si } |\tau| > \tau_M, \quad \overline{y(t)y^*(t-\tau)} = \overline{x(t)x^*(t-\tau)} + \epsilon(\tau)$$

$$\text{signal absent} : \text{ si } |\tau| > \tau_M, \quad \overline{y(t)y^*(t-\tau)} = \epsilon(\tau)$$

où $\overline{x(t)x^*(t-\tau)}$, autocorrélation temporelle de $x(t)$, est également périodique de période T_0 (cf rappel).
L'autocorrélation d'un signal périodique bruité permet donc de faire ressortir sa périodicité !

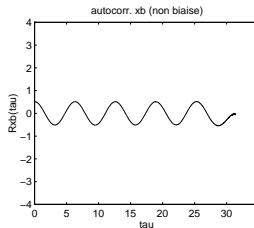
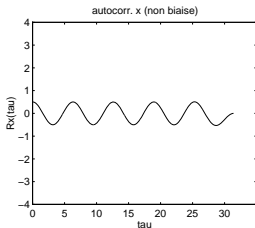
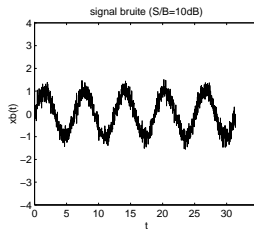
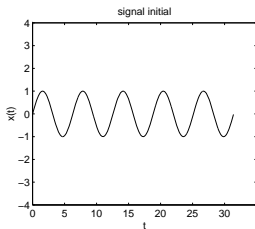
Rappel : autocorrélation d'un signal périodique. Si $x(t)$ est périodique de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$:

$$\begin{aligned} \overline{x(t)x^*(t-\tau)} &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t-\tau) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad \text{qui est aussi périodique !} \end{aligned}$$

où les a_k sont les coefficients du développement en série de Fourier de $x(t)$.

$$\text{Exemple : } x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \Phi)$$

$$\overline{x(t)x^*(t-\tau)} = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$



Détection d'un signal périodique bruité par autocorrélation ($S/B = 10\text{dB}$)

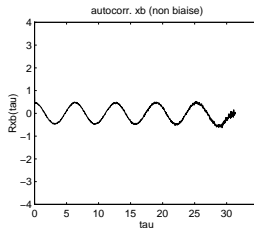
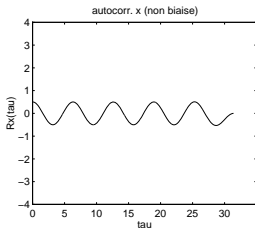
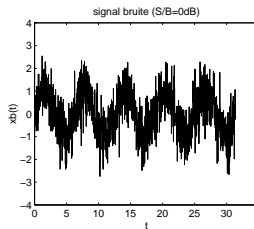
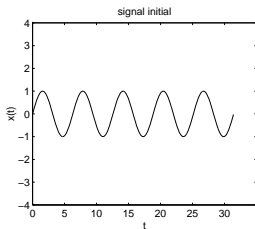
a	b
c	d

a) Signal original

b) Signal bruité

c) Autocorrélation signal original

d) Autocorrélation signal bruité



Détection d'un signal périodique bruité par autocorrélation ($S/B = 0\text{dB}$)

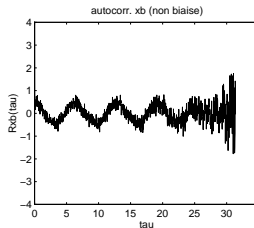
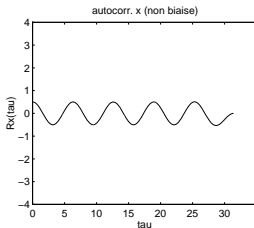
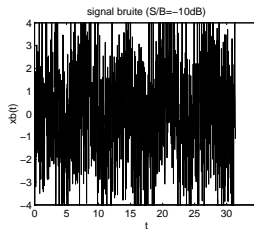
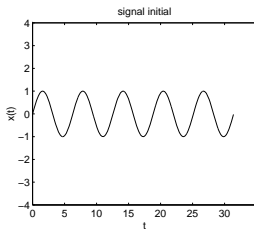
a	b
c	d

a) Signal original

b) Signal bruité

c) Autocorrélation signal original

d) Autocorrélation signal bruité



Détection d'un signal périodique bruité par autocorrélation ($S/B = -10\text{dB}$)

a	b
c	d

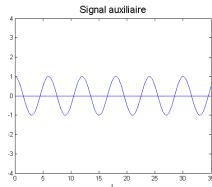
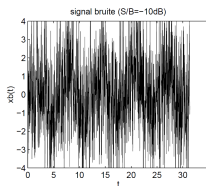
a) Signal original

b) Signal bruité

c) Autocorrélation signal original

d) Autocorrélation signal bruité

Applications de la corrélation : détection II



Détection de signaux noyés dans le bruit

Cas 2 : signal périodique inconnu de période connue.

Ce cas est plus favorable car on dispose d'une information supplémentaire. La technique décrite permet une bonne détection, avec des niveaux de bruit plus élevés que dans le cas précédent.

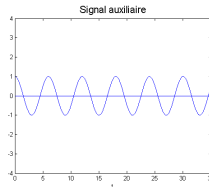
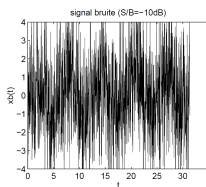
$x(t)$: signal périodique de période connue T_0 .

$y(t) = x(t) + b(t)$: signal bruité observé

où $b(t)$ est un bruit blanc "physique" ($\mathbb{E}[b(t)] = 0$; si $|\tau| > \tau_M$, $R_b(\tau) = 0$); $b(t)$ est stationnaire, ergodique et décorrélé avec le signal.

$z(t)$: signal périodique auxiliaire (non bruité) de même période T_0 .

Applications de la corrélation : détection II



Principe de la détection : calcul de l'intercorrélation temporelle avec un signal auxiliaire

$z(t)$: signal auxiliaire (non bruité) de même période T_0 .

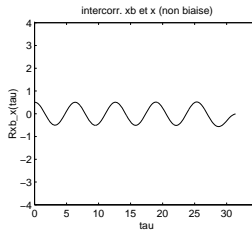
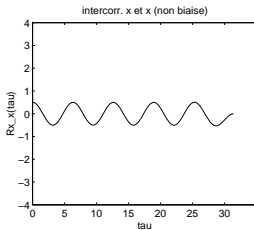
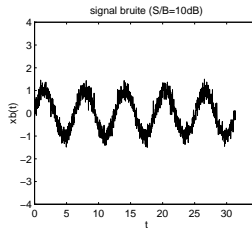
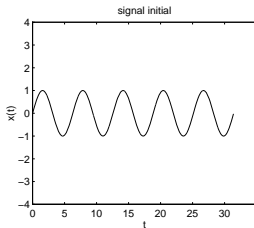
$$y(t) = x(t) + b(t)$$

signal présent : si $|\tau| > \tau_M$, $\overline{z(t)y^*(t-\tau)} = \overline{z(t)x^*(t-\tau)} + \epsilon(\tau)$

signal absent : si $|\tau| > \tau_M$, $\overline{z(t)y^*(t-\tau)} = \epsilon(\tau)$

où $\overline{z(t)x^*(t-\tau)}$ est périodique de période T_0 .

L'intercorrélation d'un signal bruité périodique avec un signal auxiliaire de même période permet donc de faire ressortir sa périodicité!



Détection d'un signal périodique bruité par intercorrélation avec un signal auxiliaire ($S/B = 10\text{dB}$)

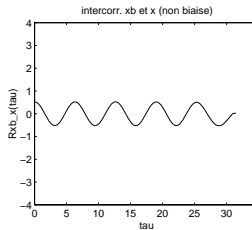
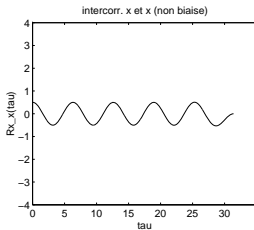
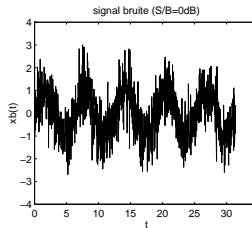
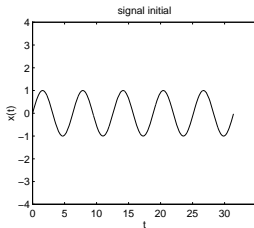
a	b
c	d

a) Signal original

b) Signal bruité

c) Intercorrélation signal original/signal auxiliaire

d) Intercorrélation signal bruité/signal auxiliaire



Détection d'un signal périodique bruité par intercorrélation avec un signal auxiliaire ($S/B = 0\text{dB}$)

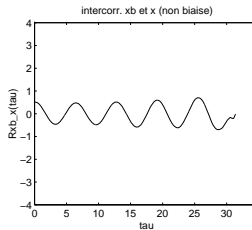
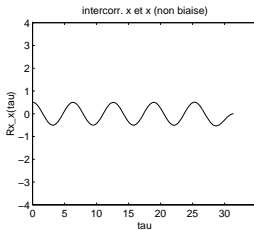
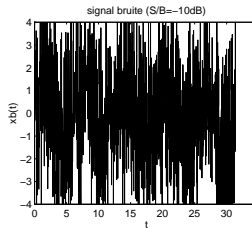
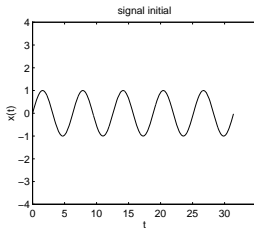
a	b
c	d

a) Signal original

b) Signal bruité

c) Intercorrélation signal original/signal auxiliaire

d) Intercorrélation signal bruité/signal auxiliaire



Détection d'un signal périodique bruité par intercorrélation avec un signal auxiliaire ($S/B = -10\text{dB}$)

a	b
c	d

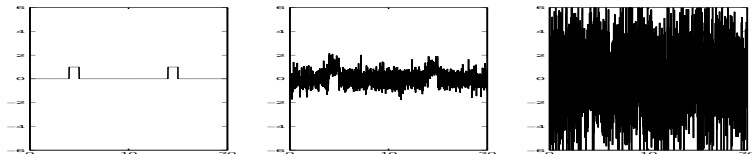
a) Signal original

b) Signal bruité

c) Intercorrélation signal original/signal auxiliaire

d) Intercorrélation signal bruité/signal auxiliaire

Applications de la corrélation : détection III - le filtre adapté



Détection de signaux noyés dans le bruit

Cas 3 : signal déterministe quelconque connu $x(t)$ de support $[0, T]$

$x(t)$: signal connu **d'énergie finie** (support $[0, T]$).

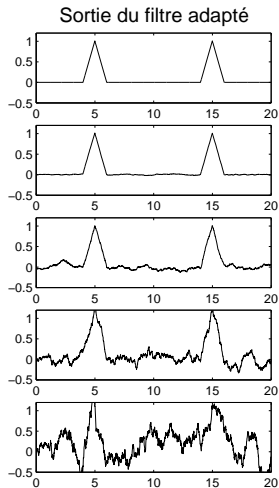
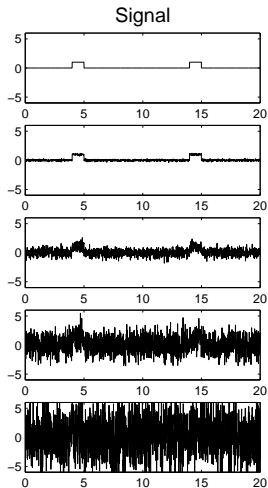
$y(t) = x(t - t_0) + b(t)$ où $b(t)$: bruit blanc.

Dans ce cas on dispose d'une information complète sur le signal à détecter. La technique de détection optimale est dans ce cas le filtrage adapté qui sera traité dans le chapitre suivant.

Le filtrage adapté revient à calculer l'intercorrélation entre le signal bruité $y(t)$ et le signal connu à détecter, translaté de $-T$: $x(t + T)$:

$$\overline{y(t)x[(t + T) - \tau]} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x((t + T) - \tau)dt$$

Cette intercorrélation est maximale pour un décalage $\tau = t_0 + T$ (fin du signal observé).



Détection d'un signal connu par filtrage adapté.

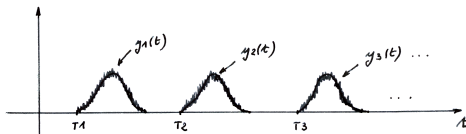
Signal connu à détecter : $x(t) = \text{rect}_{T=1}(t - 1/2)$ (support : $[0, T = 1]$).

Instants d'apparition du signal $x(t)$ dans $y(t)$: $t_0 = 4$ et 14 .

Le filtre revient à intercorrélérer le signal bruité $y(t)$ avec $x(t + T)$.

L'intercorrélation passe par un maximum à la fin de l'apparition du signal (instants 5 et 15).

Calcul de moyenne : réduction du bruit (signal répétitif)



Extraction d'un signal répétitif noyé dans le bruit

Il s'agit ici de reconstruire le signal initial (sans bruit). Le signal est supposé "répétitif" c'est-à-dire qu'il se répète identiquement à lui-même et l'on connaît ses instants d'apparition.

Principe : moyennage de N répétitions du signal

$x(t)$: une "occurrence" du signal, translatée à l'origine.

$y_i(t) = x(t - T_i) + b(t)$: $i^{\text{ème}}$ répétition du signal où $b(t)$ est un bruit blanc physique

On moyenne N occurrences du signal $y_i(t)$:

$$z(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t + T_i) = x(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b(t + T_i)$$

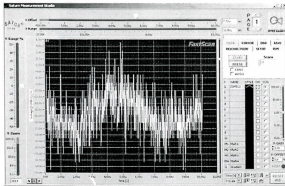
Le fait de moyenner le bruit (terme en $1/N \sum_{i=1}^N b(t + T_i)$) divise sa variance par N .
Le rapport signal à bruit avant et après moyennage est alors multiplié par un facteur N .

<http://www.amo.de/signalaveraging.html>

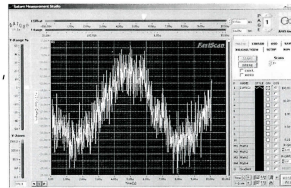
SATURN FAST SCAN

- 28 canaux
- 1 M. ch. / canal

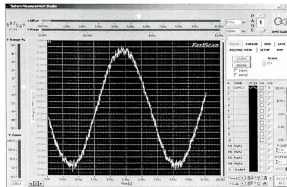
- 1 M. acq.
moyennée



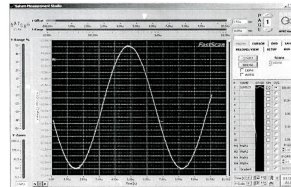
1 acquisition



moyenne 10 acquisitions

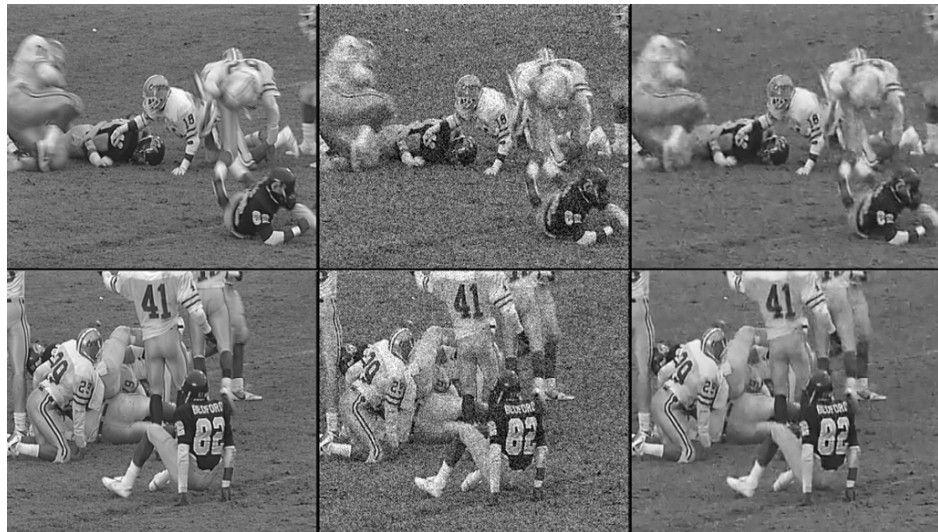


moyenne 1000 acquisitions

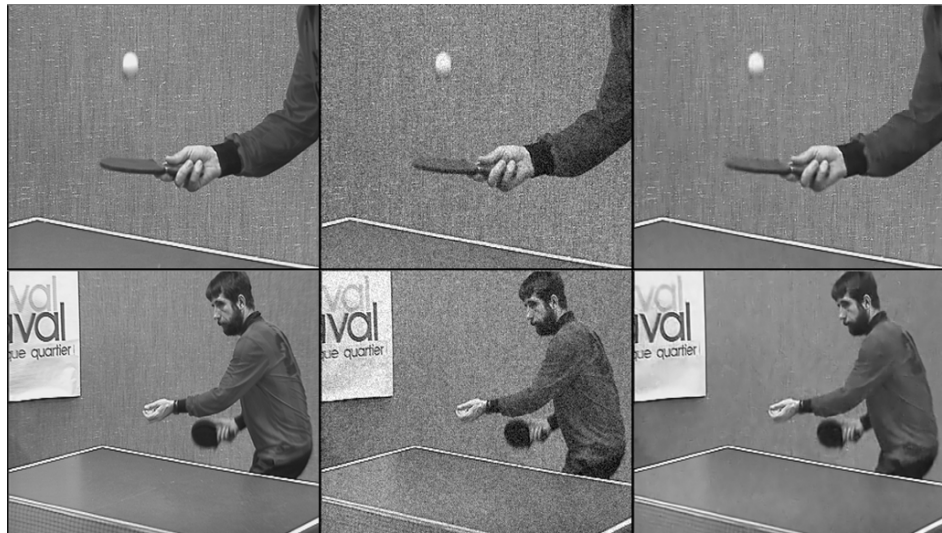


moyenne 1 000 000 acquisitions

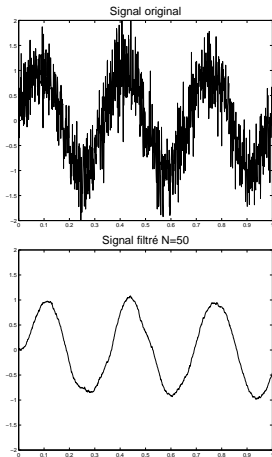
Réduction du bruit par moyennage de N acquisitions d'un signal



Réduction du bruit dans une séquence d'images
 d'après : Protter, Elad, *IEEE Trans. Image Proc.* 2009



Réduction du bruit dans une séquence d'images
 d'après : Protter, Elad, *IEEE Trans. Image Proc.* 2009

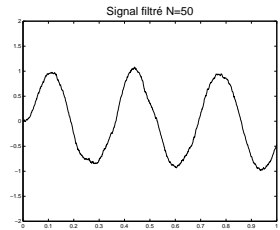
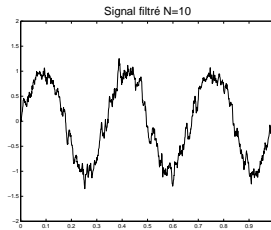
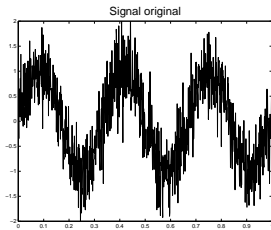


TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES

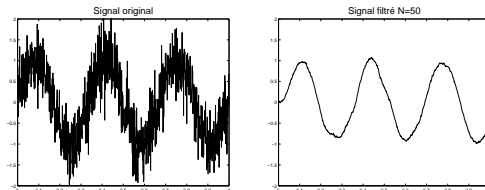
Partie 5

Partie 5

FILTRAGE DES SIGNAUX ALÉATOIRES



Introduction

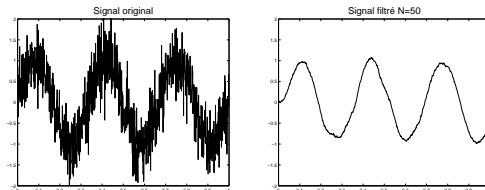


Les techniques de filtrage développées pour les signaux déterministes peuvent également être appliquées aux signaux aléatoires.

On s'intéresse alors en particulier aux relations entre les caractéristiques statistiques des signaux en entrée et en sortie du filtre de traitement. C'est ce problème qui est abordé dans cette partie, pour les signaux aléatoires à temps continu et discret.

Notons que le filtrage est un traitement couramment appliqué aux signaux aléatoires, pour retenir les composantes fréquentielles utiles et atténuer les composantes fréquentielles indésirables (bruit, etc.).

Introduction

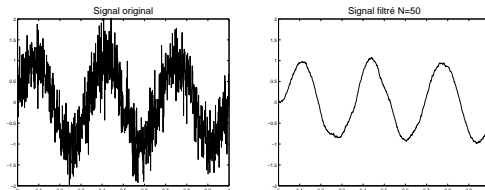


Les techniques de filtrage développées pour les signaux déterministes peuvent également être appliquées aux signaux aléatoires.

On s'intéresse alors en particulier aux relations entre les caractéristiques statistiques des signaux en entrée et en sortie du filtre de traitement. C'est ce problème qui est abordé dans cette partie, pour les signaux aléatoires à temps continu et discret.

Notons que le filtrage est un traitement couramment appliqué aux signaux aléatoires, pour retenir les composantes fréquentielles utiles et atténuer les composantes fréquentielles indésirables (bruit, etc.).

Introduction

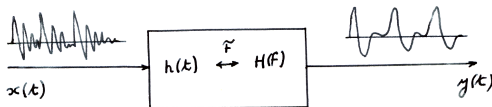


Les techniques de filtrage développées pour les signaux déterministes peuvent également être appliquées aux signaux aléatoires.

On s'intéresse alors en particulier aux relations entre les caractéristiques statistiques des signaux en entrée et en sortie du filtre de traitement. C'est ce problème qui est abordé dans cette partie, pour les signaux aléatoires à temps continu et discret.

Notons que le filtrage est un traitement couramment appliqué aux signaux aléatoires, pour retenir les composantes fréquentielles utiles et atténuer les composantes fréquentielles indésirables (bruit, etc.).

Rappel : Filtrage des signaux déterministes à temps continu



On considère un filtre (système linéaire invariant dans le temps) de réponse impulsionnelle $h(t)$, supposé stable.

- La sortie du filtre $y(t)$ est la convolution de l'entrée $x(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h(t-u) du$$

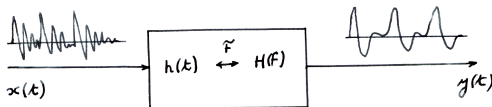
- La réponse en fréquence du filtre est définie par :

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- On a :

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad \text{où } X(f) = \mathcal{F}[x(t)] \text{ et } Y(f) = \mathcal{F}[y(t)]$$

Rappel : Filtrage des signaux déterministes à temps continu



On considère un filtre (système linéaire invariant dans le temps) de réponse impulsionnelle $h(t)$, supposé stable.

- La sortie du filtre $y(t)$ est la convolution de l'entrée $x(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h(t-u) du$$

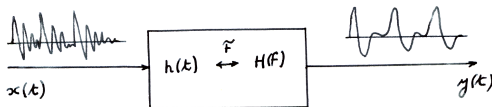
- La réponse en fréquence du filtre est définie par :

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- On a :

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad \text{où } X(f) = \mathcal{F}[x(t)] \text{ et } Y(f) = \mathcal{F}[y(t)]$$

Rappel : Filtrage des signaux déterministes à temps continu



On considère un filtre (système linéaire invariant dans le temps) de réponse impulsionnelle $h(t)$, supposé stable.

- La sortie du filtre $y(t)$ est la convolution de l'entrée $x(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h(t-u) du$$

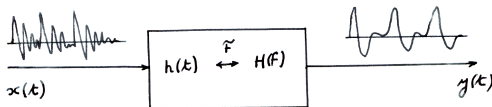
- La réponse en fréquence du filtre est définie par :

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- On a :

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad \text{où } X(f) = \mathcal{F}[x(t)] \text{ et } Y(f) = \mathcal{F}[y(t)]$$

Filtrage des signaux aléatoires à temps continu



Soit $X(t, \omega)$ un processus aléatoire stationnaire au second ordre. On applique le filtre H (supposé stable) à une réalisation de $X(t, \omega)$. La sortie du filtre est une réalisation d'un processus aléatoire $Y(t, \omega)$, dont on souhaite déterminer les caractéristiques statistiques :

- Pour ω fixé, $Y(t, \omega) = X(t, \omega) * h(t)$.
- $Y(t, \omega)$ est, comme $X(t, \omega)$, stationnaire au second ordre.
- Relation entre valeurs moyennes statistiques :

$$m_Y = H(0) \cdot m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \cdot m_X$$

- Relation entre fonctions d'auto (inter) corrélations statistiques :

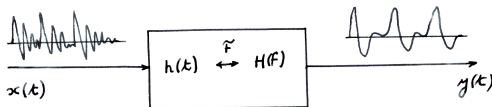
$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \quad R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

- Relation entre densités spectrales de puissance :

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$$

Filtrage des signaux aléatoires à temps continu



Soit $X(t, \omega)$ un processus aléatoire stationnaire au second ordre. On applique le filtre H (supposé stable) à une réalisation de $X(t, \omega)$. La sortie du filtre est une réalisation d'un processus aléatoire $Y(t, \omega)$, dont on souhaite déterminer les caractéristiques statistiques :

- Pour ω fixé, $Y(t, \omega) = X(t, \omega) * h(t)$.
- $Y(t, \omega)$ est, comme $X(t, \omega)$, stationnaire au second ordre.
- Relation entre valeurs moyennes statistiques :

$$m_Y = H(0) \cdot m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \cdot m_X$$

- Relation entre fonctions d'auto (inter) corrélations statistiques :

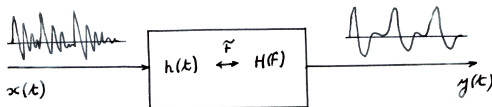
$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \quad R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

- Relation entre densités spectrales de puissance :

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$$

Filtrage des signaux aléatoires à temps continu



Soit $X(t, \omega)$ un processus aléatoire stationnaire au second ordre. On applique le filtre H (supposé stable) à une réalisation de $X(t, \omega)$. La sortie du filtre est une réalisation d'un processus aléatoire $Y(t, \omega)$, dont on souhaite déterminer les caractéristiques statistiques :

- Pour ω fixé, $Y(t, \omega) = X(t, \omega) * h(t)$.
- $Y(t, \omega)$ est, comme $X(t, \omega)$, stationnaire au second ordre.
- Relation entre valeurs moyennes statistiques :

$$m_Y = H(0) \cdot m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \cdot m_X$$

- Relation entre fonctions d'auto (inter) corrélations statistiques :

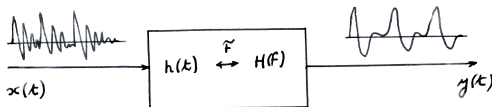
$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \quad R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

- Relation entre densités spectrales de puissance :

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$$

Filtrage des signaux aléatoires à temps continu



Soit $X(t, \omega)$ un processus aléatoire stationnaire au second ordre. On applique le filtre H (supposé stable) à une réalisation de $X(t, \omega)$. La sortie du filtre est une réalisation d'un processus aléatoire $Y(t, \omega)$, dont on souhaite déterminer les caractéristiques statistiques :

- Pour ω fixé, $Y(t, \omega) = X(t, \omega) * h(t)$.
- $Y(t, \omega)$ est, comme $X(t, \omega)$, stationnaire au second ordre.
- Relation entre valeurs moyennes statistiques :

$$m_Y = H(0) \cdot m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \cdot m_X$$

- Relation entre fonctions d'auto (inter) corrélations statistiques :

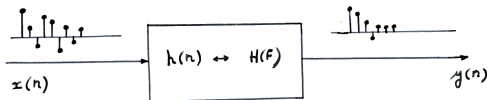
$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) \quad R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

- Relation entre densités spectrales de puissance :

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$$

Rappel : Filtrage des signaux déterministes à temps discret



On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, supposé stable.

- La sortie du filtre $y(n)$ est la convolution discrète de l'entrée $x(n)$ par la réponse impulsionnelle $h(n)$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k)$$

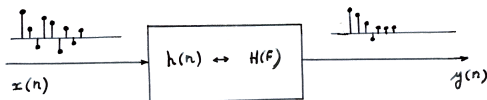
- La réponse en fréquence du filtre est définie par :

$$H(f) = \mathcal{F}[h(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j2\pi kf}$$

- On a :

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad \text{où } X(f) = \mathcal{F}[x(n)] \text{ et } Y(f) = \mathcal{F}[y(n)]$$

Filtrage des signaux aléatoires à temps discret



Soit $X(n, \omega)$ une suite aléatoire stationnaire au second ordre. On applique le filtre H (supposé stable) à une réalisation de $X(n, \omega)$. La sortie du filtre est une réalisation d'une suite aléatoire $Y(n, \omega)$:

- Pour ω fixé, $Y(n, \omega) = X(n, \omega) * h(n)$.
- $Y(n, \omega)$ est, comme $X(n, \omega)$, stationnaire au second ordre.
- Relation entre valeurs moyennes :

$$m_Y = H(0) \cdot m_X = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot m_X$$

- Relation entre fonctions d'auto (inter) corrélations :

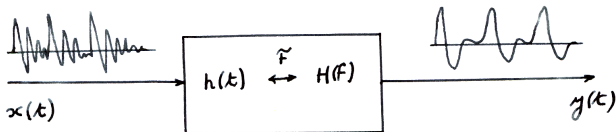
$$R_Y(k) = R_X(k) * h(k) * h^*(-k)$$

$$R_{YX}(k) = R_X(k) * h(k) \quad R_Y(k) = R_{XY}(k) * h(k)$$

- Relation entre d.s.p. :

$$\begin{aligned} S_Y(z) &= S_X(z) H(z) H^*(1/z^*) \\ S_Y(f) &= S_X(f) |H(f)|^2 \end{aligned}$$

Application : identification d'un système linéaire inconnu



Une technique très utilisée permettant de déterminer la réponse impulsionnelle d'un système à temps continu consiste à lui injecter un bruit blanc $X(t)$, de fonction d'autocorrélation : $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$.

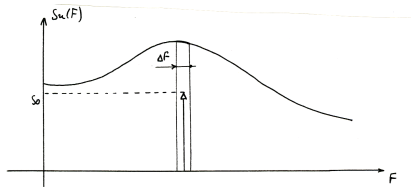
Il suffit d'intercorrélérer la sortie du système avec l'entrée :

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= R_X(\tau) * h(\tau) = \frac{N_0}{2} h(\tau) \\ \Rightarrow h(\tau) &= \frac{R_{YX}(\tau)}{N_0/2} \end{aligned}$$

Pourquoi appliquer un bruit blanc en entrée plutôt qu'une impulsion de Dirac $\delta(\tau)$?

- Il est plus facile d'engendrer l'approximation d'un bruit blanc que d'une impulsion de Dirac.
- Une impulsion brève et très énergétique en entrée peut provoquer une saturation voire endommager le système, ce qui n'est pas le cas d'un bruit blanc.

Application : analyse spectrale par filtrage passe-bande



On filtre un processus aléatoire $X(t)$ stationnaire (de d.s.p. $S_X(f)$) par un filtre passe-bande H étroit (de largeur Δf) centré en f_0 . La sortie du filtre est un processus $Y(t)$.

- Si $S_X(f)$ ne comporte pas de raie (Dirac) dans la bande :

$$P_Y(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df \simeq 2S_X(f_0) \Delta f$$

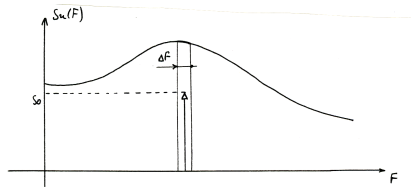
P_Y est donc proportionnel à la d.s.p. de $X(t)$ au point f_0 .

- Si $S_X(f)$ comporte une raie $S_0\delta(f - f_0) + S_0\delta(f + f_0)$ dans la bande :

$$P_Y(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df \simeq 2S_0 + 2S_X(f_0) \Delta f$$

Quand $\Delta f \rightarrow 0$ P_Y donne la puissance de la raie. On obtient une sinusoïde pure en sortie.

Application : analyse spectrale par filtrage passe-bande



On filtre un processus aléatoire $X(t)$ stationnaire (de d.s.p. $S_X(f)$) par un filtre passe-bande H étroit (de largeur Δf) centré en f_0 . La sortie du filtre est un processus $Y(t)$.

- Si $S_X(f)$ ne comporte pas de raie (Dirac) dans la bande :

$$P_Y(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df \simeq 2S_X(f_0) \Delta f$$

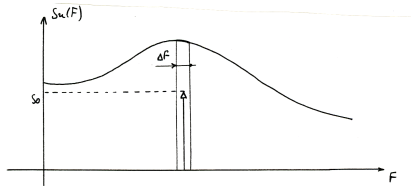
P_Y est donc proportionnel à la d.s.p. de $X(t)$ au point f_0 .

- Si $S_X(f)$ comporte une raie $S_0\delta(f - f_0) + S_0\delta(f + f_0)$ dans la bande :

$$P_Y(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df \simeq 2S_0 + 2S_X(f_0) \Delta f$$

Quand $\Delta f \rightarrow 0$ P_Y donne la puissance de la raie. On obtient une sinusoïde pure en sortie.

Application : analyse spectrale par filtrage passe-bande



On filtre un processus aléatoire $X(t)$ stationnaire (de d.s.p. $S_X(f)$) par un filtre passe-bande H étroit (de largeur Δf) centré en f_0 . La sortie du filtre est un processus $Y(t)$.

- Si $S_X(f)$ ne comporte pas de raie (Dirac) dans la bande :

$$P_Y(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df \simeq 2S_X(f_0) \Delta f$$

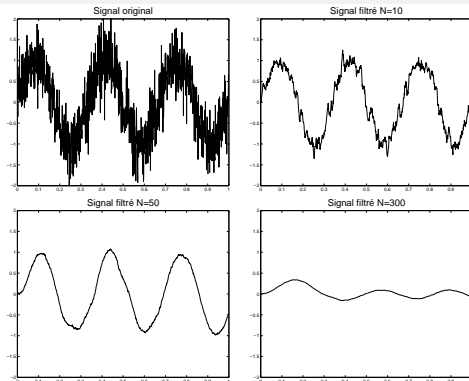
P_Y est donc proportionnel à la d.s.p. de $X(t)$ au point f_0 .

- Si $S_X(f)$ comporte une raie $S_0\delta(f - f_0) + S_0\delta(f + f_0)$ dans la bande :

$$P_Y(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df \simeq 2S_0 + 2S_X(f_0) \Delta f$$

Quand $\Delta f \rightarrow 0$ P_Y donne la puissance de la raie. On obtient une sinusoïde pure en sortie.

Application : réduction du bruit par filtre moyenneur I



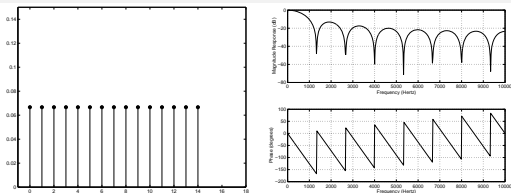
Filtrage moyenneur d'une sinusoïde bruitée

Lorsqu'un signal est entaché d'un bruit important, on peut réduire sa contribution par filtrage passe-bas (= moyennage).

- Filtre moyenneur discret :

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-(N-1)}^n x(i)$$

Application : réduction du bruit par filtre moyeneur II



$h(n)$ et $H(f)$ (filtre passe-bas)

- Réponse impulsionnelle , réponse en fréquence :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{pour } n \in \{0, \dots, N-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad H(f) = \frac{1}{N} e^{-j(N-1)\pi f} \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

- Si $X(k)$ est un bruit blanc de d.s.p. = variance = puissance σ_{bruit}^2 on a :

$$\text{puissance du bruit en entrée : } P_X = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_X(f) df = \sigma_{\text{bruit}}^2$$

$$\text{puissance du bruit en sortie : } P_Y = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |H(f)|^2 S_X(f) df = \sigma_{\text{bruit}}^2 \sum_{n=0}^{N-1} h^2(n) = \frac{1}{N} \sigma_{\text{bruit}}^2$$

On voit qu'un moyennage du signal sur N échantillons réduit la variance du bruit d'un facteur N .



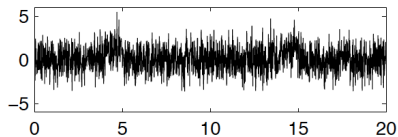
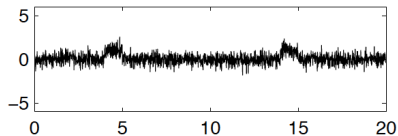
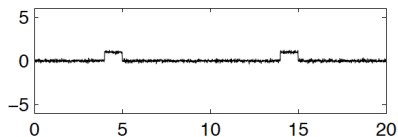
a



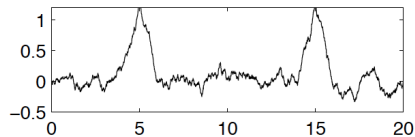
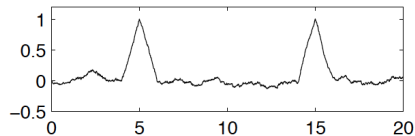
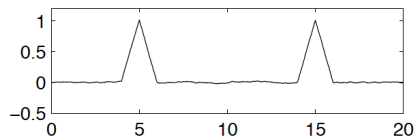
b

(a) Image bruitée (bruit blanc), (b) Filtre passe-bas moyennneur (gaussien),

Application : le filtre adapté

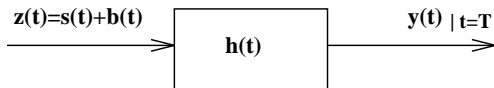


signal bruité



sortie du filtre adapté

Application : le filtre adapté I



s : signal déterministe connu, de support $[0, T]$.

z : signal bruité

b : bruit blanc

- Principe : filtrage de $z(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ qui maximise le "rapport signal à bruit" à l'instant T (fin du signal) :

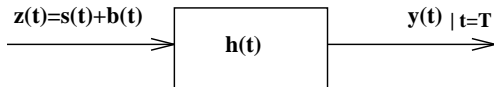
$$y(t) = z(t) * h(t) = \underbrace{s(t) * h(t)}_{y_s(t)} + \underbrace{b(t) * h(t)}_{y_b(t)}$$

$$\text{critère : } \max_{\{h(t)\}} \frac{|y_s(T)|^2}{\mathbb{E}[|y_b(T)|^2]}$$

- Expression du filtre adapté :

$$h(t) = s(T - t)$$

Application : le filtre adapté I



s : signal déterministe connu, de support $[0, T]$.

z : signal bruité

b : bruit blanc

- Principe : filtrage de $z(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ qui maximise le "rapport signal à bruit" à l'instant T (fin du signal) :

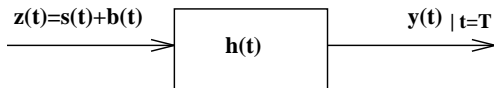
$$y(t) = z(t) * h(t) = \underbrace{s(t) * h(t)}_{y_s(t)} + \underbrace{b(t) * h(t)}_{y_b(t)}$$

$$\text{critère : } \max_{\{h(t)\}} \frac{|y_s(T)|^2}{\mathbb{E}[|y_b(T)|^2]}$$

- Expression du filtre adapté :

$$h(t) = s(T - t)$$

Application : le filtre adapté I



s : signal déterministe connu, de support $[0, T]$.

z : signal bruité

b : bruit blanc

- Principe : filtrage de $z(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ qui maximise le "rapport signal à bruit" à l'instant T (fin du signal) :

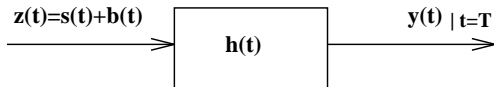
$$y(t) = z(t) * h(t) = \underbrace{s(t) * h(t)}_{y_s(t)} + \underbrace{b(t) * h(t)}_{y_b(t)}$$

$$\text{critère : } \max_{\{h(t)\}} \frac{|y_s(T)|^2}{\mathbb{E}[|y_b(T)|^2]}$$

- Expression du filtre adapté :

$$h(t) = s(T - t)$$

Application : le filtre adapté II

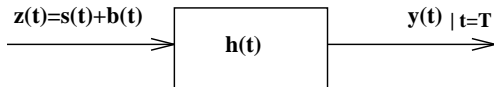


- Sortie du filtre adapté :

$$\begin{aligned}y(t) &= z(t) * h(t) \\&= z(t) * s(T - t) \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau) s(T - (t - \tau)) d\tau \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau) s((\tau + T) - t) d\tau\end{aligned}$$

On voit que le filtre adapté calcule **l'intercorrélation** entre le **signal bruité** $z(t)$ et le **signal connu à détecter, translaté de $-T$** : $s(t + T)$.

Application : le filtre adapté II



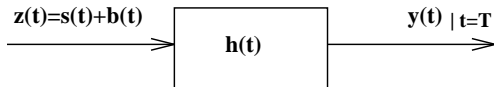
- Sortie du filtre adapté : Développons l'expression de $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) * h(t) \\ &= (s(t) + b(t)) * s(T - t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) s(T - t + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau) s(T - t + \tau) d\tau \\ &= R_s(t - T) + R_{bs}(t - T) \simeq R_s(t - T) \end{aligned}$$

La sortie du filtrage adapté lorsque le signal $s(t)$ est présent, est donc l'autocorrélation $R_s(t - T)$ du signal $s(t)$.

- Le filtre adapté passe donc par un maximum à l'instant T lorsque le signal est présent.
- Si l'instant d'arrivée du signal est $t_0 \neq 0$ inconnu, il suffit de détecter le passage par un maximum de la sortie du filtre adapté qui se produira à l'instant $t_0 + T$ (fin du signal).
- Si le bruit n'est pas blanc, le filtre adapté donne tout de même souvent de bons résultats. On sait par ailleurs traiter le cas d'un bruit coloré (+ complexe).

Application : le filtre adapté II



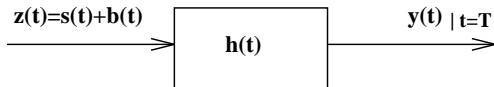
- Sortie du filtre adapté : Développons l'expression de $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) * h(t) \\ &= (s(t) + b(t)) * s(T - t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) s(T - t + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau) s(T - t + \tau) d\tau \\ &= R_s(t - T) + R_{bs}(t - T) \simeq R_s(t - T) \end{aligned}$$

La sortie du filtrage adapté lorsque le signal $s(t)$ est présent, est donc l'autocorrélation $R_s(t - T)$ du signal $s(t)$.

- Le filtre adapté passe donc par un maximum à l'instant T lorsque le signal est présent.
- Si l'instant d'arrivée du signal est $t_0 \neq 0$ inconnu, il suffit de détecter le passage par un maximum de la sortie du filtre adapté qui se produira à l'instant $t_0 + T$ (fin du signal).
- Si le bruit n'est pas blanc, le filtre adapté donne tout de même souvent de bons résultats. On sait par ailleurs traiter le cas d'un bruit coloré (+ complexe).

Application : le filtre adapté II



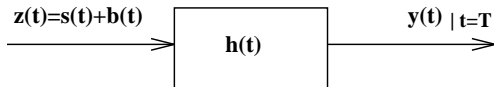
- Sortie du filtre adapté : Développons l'expression de $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) * h(t) \\ &= (s(t) + b(t)) * s(T - t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) s(T - t + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau) s(T - t + \tau) d\tau \\ &= R_s(t - T) + R_{bs}(t - T) \simeq R_s(t - T) \end{aligned}$$

La sortie du filtrage adapté lorsque le signal $s(t)$ est présent, est donc l'autocorrélation $R_s(t - T)$ du signal $s(t)$.

- Le filtre adapté passe donc par un maximum à l'instant T lorsque le signal est présent.
- Si l'instant d'arrivée du signal est $t_0 \neq 0$ inconnu, il suffit de détecter le passage par un maximum de la sortie du filtre adapté qui se produira à l'instant $t_0 + T$ (fin du signal).
- Si le bruit n'est pas blanc, le filtre adapté donne tout de même souvent de bons résultats. On sait par ailleurs traiter le cas d'un bruit coloré (+ complexe).

Application : le filtre adapté II

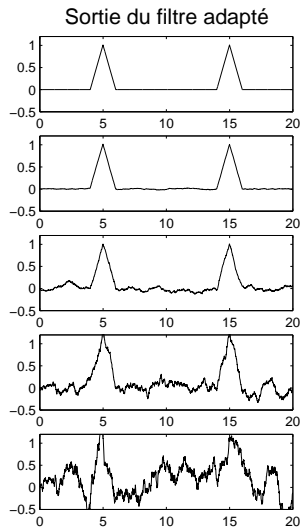
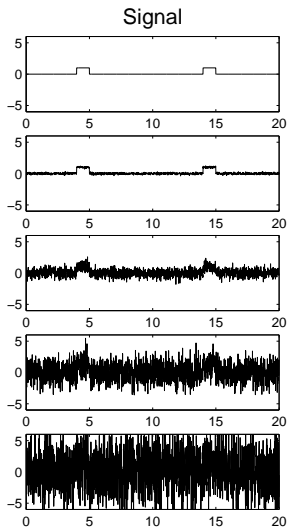


- Sortie du filtre adapté : Développons l'expression de $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) * h(t) \\ &= (s(t) + b(t)) * s(T - t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) s(T - t + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau) s(T - t + \tau) d\tau \\ &= R_s(t - T) + R_{bs}(t - T) \simeq R_s(t - T) \end{aligned}$$

La sortie du filtrage adapté lorsque le signal $s(t)$ est présent, est donc l'autocorrélation $R_s(t - T)$ du signal $s(t)$.

- Le filtre adapté passe donc par un maximum à l'instant T lorsque le signal est présent.
- Si l'instant d'arrivée du signal est $t_0 \neq 0$ inconnu, il suffit de détecter le passage par un maximum de la sortie du filtre adapté qui se produira à l'instant $t_0 + T$ (fin du signal).
- Si le bruit n'est pas blanc, le filtre adapté donne tout de même souvent de bons résultats. On sait par ailleurs traiter le cas d'un bruit coloré (+ complexe).



Filtrage adapté d'un signal bruité.

Signal $s(t) = \text{rect}_{T=1}(t - 1/2)$. Instant d'arrivée : $t_0 = 4$ et 14 . Fin du signal : $t_0 + T = 5$ et 15 . Bruit blanc gaussien.

Reconnaissance de formes par filtrage adapté



(a)



(b)



(c)

*W. T. Freeman, K. Tanaka, J. Ohta, K. Kyuma,
MIT, Computer Science and Artificial Intelligence Laboratory*

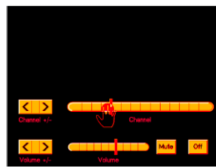
Reconnaissance de formes par filtrage adapté



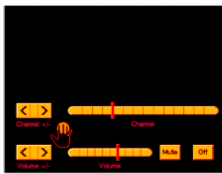
(a) television off



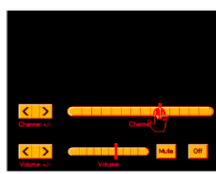
(c) channel control



(b) turn on television

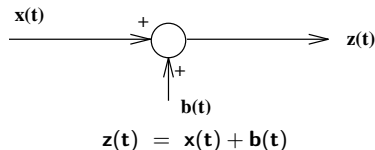


(d) change channel



W. T. Freeman, K. Tanaka, J. Ohta, K. Kyuma,
MIT, Computer Science and Artificial Intelligence Laboratory

Application : le filtre de Wiener I



x : signal inconnu ou aléatoire

z : signal bruité

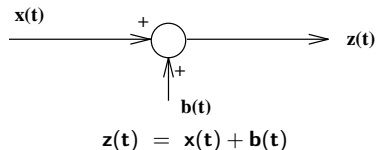
b : bruit aléatoire additif

- Objectif : filtrage optimal de $z(t)$ pour extraire $x(t)$ du bruit $b(t)$. Signal débruité : $\hat{x}(t)$.
- Hypothèses :
 - ▶ On ne connaît pas $x(t)$!
 - ▶ $x(t)$ et $b(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires, centrés, non corrélés ;
 - ▶ les densités spectrales de puissance (d.s.p.)
 $S_x(f)$ et $S_b(f)$ de $x(t)$ et $b(t)$ sont connues !
- Filtrage "optimal" du bruit : le filtre de Wiener est le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que :

$$\hat{x}(t) = z(t) * h(t)$$

$$\mathbb{E}[(x(t) - \hat{x}(t))^2] \text{ minimum}$$

Application : le filtre de Wiener I



x : signal inconnu ou aléatoire

z : signal bruité

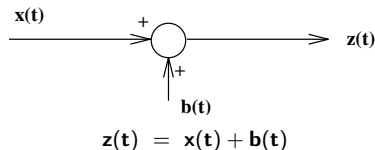
b : bruit aléatoire additif

- Objectif : filtrage optimal de $z(t)$ pour extraire $x(t)$ du bruit $b(t)$. Signal débruité : $\hat{x}(t)$.
- Hypothèses :
 - ▶ On ne connaît pas $x(t)$!
 - ▶ $x(t)$ et $b(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires, centrés, non corrélés ;
 - ▶ les densités spectrales de puissance (d.s.p.)
 $S_x(f)$ et $S_b(f)$ de $x(t)$ et $b(t)$ sont connues !
- Filtrage "optimal" du bruit : le filtre de Wiener est le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que :

$$\hat{x}(t) = z(t) * h(t)$$

$$\mathbb{E}[(x(t) - \hat{x}(t))^2] \text{ minimum}$$

Application : le filtre de Wiener I



x : signal inconnu ou aléatoire

z : signal bruité

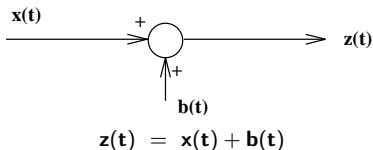
b : bruit aléatoire additif

- Objectif : filtrage optimal de $z(t)$ pour extraire $x(t)$ du bruit $b(t)$. Signal débruité : $\hat{x}(t)$.
- Hypothèses :
 - ▶ On ne connaît pas $x(t)$!
 - ▶ $x(t)$ et $b(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires, centrés, non corrélés ;
 - ▶ les densités spectrales de puissance (d.s.p.)
 $S_x(f)$ et $S_b(f)$ de $x(t)$ et $b(t)$ sont connues !
- Filtrage "optimal" du bruit : le filtre de Wiener est le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que :

$$\hat{x}(t) = z(t) * h(t)$$

$$\mathbb{E}[(x(t) - \hat{x}(t))^2] \text{ minimum}$$

Application : le filtre de Wiener I



x : signal inconnu ou aléatoire

z : signal bruité

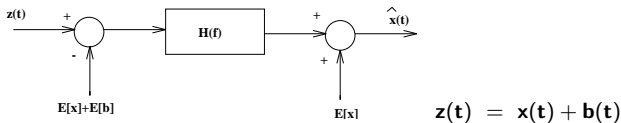
b : bruit aléatoire additif

- Objectif : filtrage optimal de $z(t)$ pour extraire $x(t)$ du bruit $b(t)$. Signal débruité : $\hat{x}(t)$.
- Hypothèses :
 - ▶ On ne connaît pas $x(t)$!
 - ▶ $x(t)$ et $b(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires, centrés, non corrélés ;
 - ▶ les densités spectrales de puissance (d.s.p.)
 $S_x(f)$ et $S_b(f)$ de $x(t)$ et $b(t)$ sont connues !
- Filtrage "optimal" du bruit : le filtre de Wiener est le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que :

$$\hat{x}(t) = z(t) * h(t)$$

$$\mathbb{E}[(x(t) - \hat{x}(t))^2] \text{ minimum}$$

Application : le filtre de Wiener II



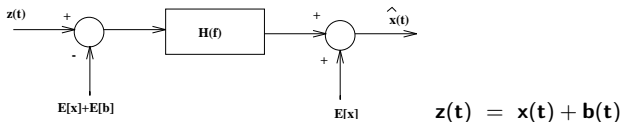
- Réponse en fréquence du filtre de Wiener :

$$H(f) = \frac{S_x(f)}{S_x(f) + S_b(f)} = \frac{1}{1 + \frac{S_b(f)}{S_x(f)}}$$

- Remarques :

- ▶ Ce filtre est non causal (\exists une version causale – voir Therrien92)
- ▶ Ce filtre permet de reconstituer $x(t)$ à partir de $z(t)$ en éliminant au mieux le bruit sans trop distordre le signal.
- ▶ Si les signaux ne sont pas centrés (i.e. de moyennes nulles) il faut préalablement soustraire les moyennes $E[x]$ et $E[b]$.
Si $E[b] = 0$, $E[x]$ peut être estimée par moyennage du signal dégradé : $E[x] \simeq E[z]$.
- ▶ Si le bruit est blanc $S_b(f) = \text{constante}$.
- ▶ Généralisation du filtre de Wiener aux signaux non stationnaires : filtre de Kalman (voir Kay93).

Application : le filtre de Wiener II

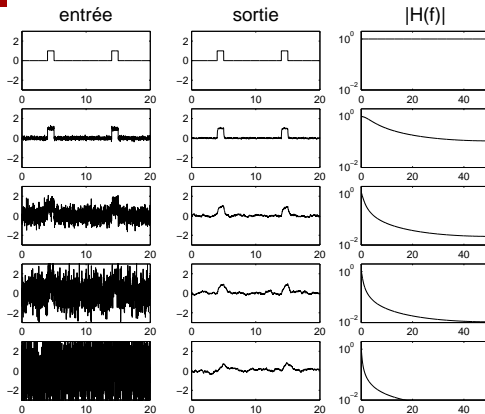


- Réponse en fréquence du filtre de Wiener :

$$H(f) = \frac{S_x(f)}{S_x(f) + S_b(f)} = \frac{1}{1 + \frac{S_b(f)}{S_x(f)}}$$

- Remarques :

- ▶ Ce filtre est non causal (\exists une version causale – voir Therrien92)
- ▶ Ce filtre permet de reconstituer $x(t)$ à partir de $z(t)$ en éliminant au mieux le bruit sans trop distordre le signal.
- ▶ Si les signaux ne sont pas centrés (i.e. de moyennes nulles) il faut préalablement soustraire les moyennes $E[x]$ et $E[b]$.
Si $E[b] = 0$, $E[x]$ peut être estimée par moyennage du signal dégradé : $E[x] \simeq E[z]$.
- ▶ Si le bruit est blanc $S_b(f) = \text{constante}$.
- ▶ Généralisation du filtre de Wiener aux signaux non stationnaires : filtre de Kalman (voir Kay93).



Filtrage de Wiener d'un signal bruité :

Signal $x(n)$ inconnu : fonction porte. Bruit blanc gaussien discret de variance σ_b^2 .

Modèle utilisé pour l'autocorrélation du signal :

$$R_x(k) = \sigma_x^2 \rho^{|k|}, \quad \rho = 0,99$$

Expression du filtre de Wiener discret :

$$H(z) = \frac{S_x(z)}{S_x(z) + S_b(z)} = \frac{\sigma_x^2 (1 - \rho^2)}{\sigma_x^2 (1 - \rho^2) + \sigma_b^2 (1 - \rho z^{-1})(1 - \rho z)}$$



a



b



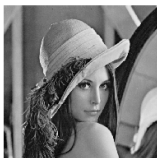
c



d

(a) Image originale, (b) Image bruitée (bruit blanc gaussien),
(c) Filtre passe-bas gaussien, (d) Filtre de Wiener

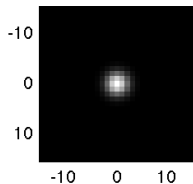
Original



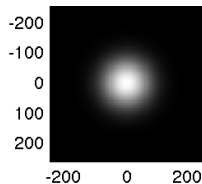
Noisy PSNR=19.7 SNR=9.98



Best Gauss. filter psf



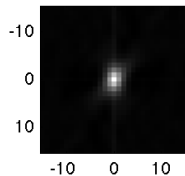
Gauss. filter freq. response



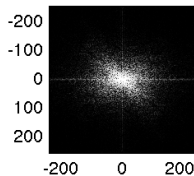
Gauss. denoise PSNR=26.7 SNR=21.1



Wiener filter psf

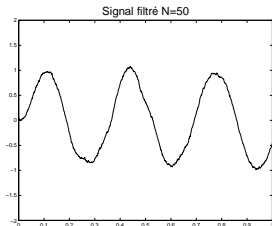
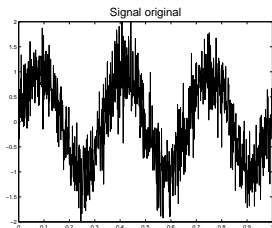


Wiener filter freq. response



Wiener denoise PSNR=27.3 SNR=21.8



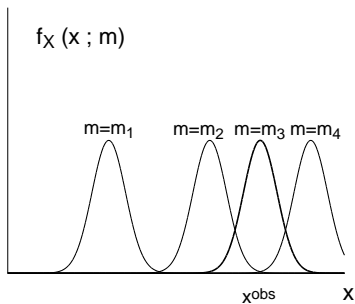


TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES

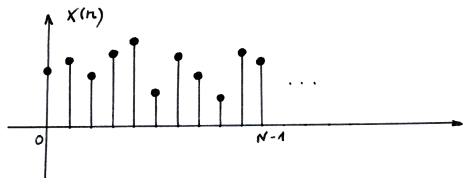
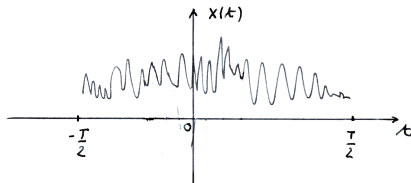
Partie 6

Partie 6

ESTIMATION STATISTIQUE



Estimation paramétrique et non paramétrique



▷ La description d'un signal aléatoire $X(t)$ passe par la détermination de ses caractéristiques statistiques (moments, d.s.p., etc.).

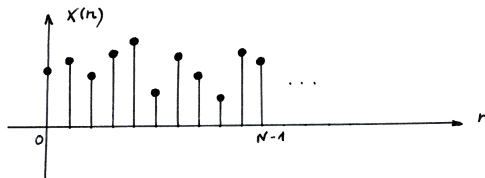
▷ En pratique, on ne dispose souvent que d'une seule réalisation du signal, sur une durée d'observation finie. Lorsque le signal est stationnaire ergodique ses caractéristiques peuvent alors être approchées par des moyennes temporelles sur des intervalles temporels finis : on parle d'"estimation".

▷ On se pose donc ici le problème de l'estimation des caractéristiques statistiques d'un signal à partir de l'observation d'une réalisation du signal :

- sur une fenêtre de durée T (signal à temps continu) ;
- sur une suite de N échantillons (signal à temps discret).

▷ L'estimation des caractéristiques statistiques générales (moment d'ordre n , d.s.p.) est dite non paramétrique. L'estimation statistique paramétrique concerne la détermination des paramètres d'un modèle statistique particulier (par exemple le paramètre λ d'un processus de Poisson, la moyenne et la variance d'un processus gaussien, etc.).

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne I



On se pose le problème de l'estimation de la valeur moyenne statistique d'un signal aléatoire stationnaire ergodique $X(n, \omega)$. On considère le cas particulier d'un bruit blanc discret $X(n, \omega)$ de moyenne non nulle m_X et de variance σ_X^2 .

▷ A estimer : $m_X = \mathbb{E}[X(n, \omega)]$.

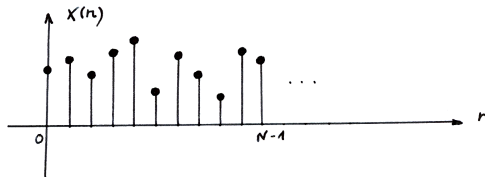
▷ On observe une seule réalisation de N échantillons de ce bruit : $\{X(0, \omega), X(1, \omega), \dots, X(N-1, \omega)\}$.

▷ On considère les deux estimées suivantes pour la moyenne statistique :

- estimée 1 : $\hat{M}_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n, \omega)$ moyenne empirique
- estimée 2 : $\hat{M}_2 = X(0, \omega)$ 1er échantillon

Les estimateurs \hat{M}_1 et \hat{M}_2 dépendent tous deux de l'épreuve ω . Ce sont donc des variables aléatoires dont on souhaite connaître les caractéristiques statistiques (moyenne, variance, etc.).

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne I



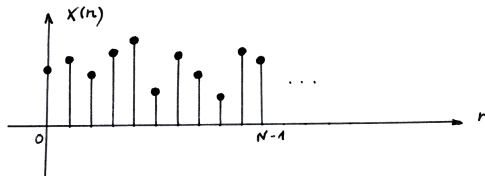
On se pose le problème de l'estimation de la valeur moyenne statistique d'un signal aléatoire stationnaire ergodique $X(n, \omega)$. On considère le cas particulier d'un bruit blanc discret $X(n, \omega)$ de moyenne non nulle m_X et de variance σ_X^2 .

- ▷ A estimer : $m_X = \mathbb{E}[X(n, \omega)]$.
- ▷ On observe une seule réalisation de N échantillons de ce bruit : $\{X(0, \omega), X(1, \omega), \dots, X(N-1, \omega)\}$.
- ▷ On considère les deux estimées suivantes pour la moyenne statistique :

- estimée 1 : $\hat{M}_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n, \omega)$ moyenne empirique
- estimée 2 : $\hat{M}_2 = X(0, \omega)$ 1er échantillon

Les estimateurs \hat{M}_1 et \hat{M}_2 dépendent tous deux de l'épreuve ω . Ce sont donc des variables aléatoires dont on souhaite connaître les caractéristiques statistiques (moyenne, variance, etc.).

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne I



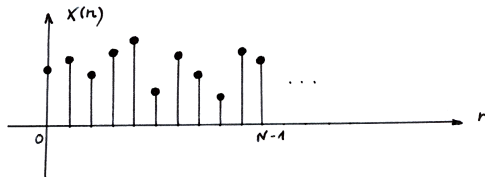
On se pose le problème de l'estimation de la valeur moyenne statistique d'un signal aléatoire stationnaire ergodique $X(n, \omega)$. On considère le cas particulier d'un bruit blanc discret $X(n, \omega)$ de moyenne non nulle m_X et de variance σ_X^2 .

- ▷ A estimer : $m_X = \mathbb{E}[X(n, \omega)]$.
- ▷ On observe une seule réalisation de N échantillons de ce bruit : $\{X(0, \omega), X(1, \omega), \dots, X(N-1, \omega)\}$.
- ▷ On considère les deux estimées suivantes pour la moyenne statistique :

- estimée 1 : $\hat{M}_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n, \omega)$ moyenne empirique
- estimée 2 : $\hat{M}_2 = X(0, \omega)$ 1er échantillon

Les estimateurs \hat{M}_1 et \hat{M}_2 dépendent tous deux de l'épreuve ω . Ce sont donc des variables aléatoires dont on souhaite connaître les caractéristiques statistiques (moyenne, variance, etc.).

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne I

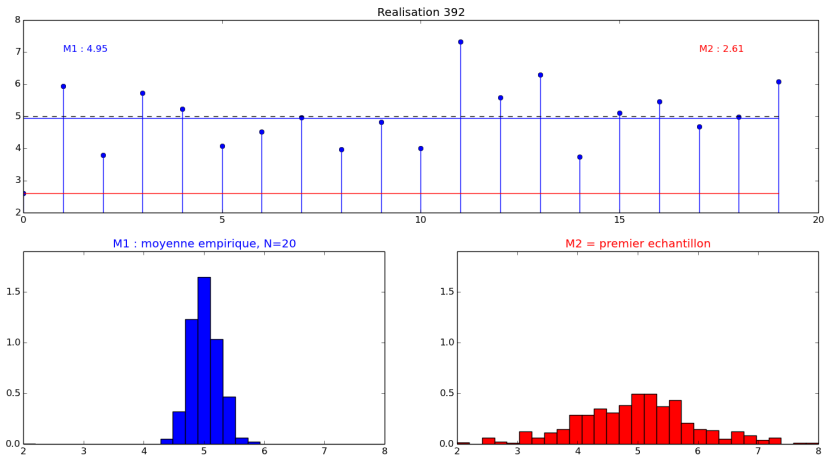


On se pose le problème de l'estimation de la valeur moyenne statistique d'un signal aléatoire stationnaire ergodique $X(n, \omega)$. On considère le cas particulier d'un bruit blanc discret $X(n, \omega)$ de moyenne non nulle m_X et de variance σ_X^2 .

- ▷ A estimer : $m_X = \mathbb{E}[X(n, \omega)]$.
- ▷ On observe une seule réalisation de N échantillons de ce bruit : $\{X(0, \omega), X(1, \omega), \dots, X(N-1, \omega)\}$.
- ▷ On considère les deux estimées suivantes pour la moyenne statistique :

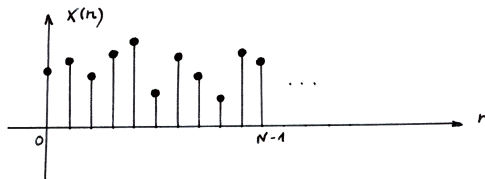
- estimée 1 : $\hat{M}_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n, \omega)$ moyenne empirique
- estimée 2 : $\hat{M}_2 = X(0, \omega)$ 1er échantillon

Les estimateurs \hat{M}_1 et \hat{M}_2 dépendent tous deux de l'épreuve ω . Ce sont donc des variables aléatoires dont on souhaite connaître les caractéristiques statistiques (moyenne, variance, etc.).



Histogrammes des valeurs prises par les estimateurs \hat{M}_1 et \hat{M}_2 sur 392 réalisations du signal aléatoire ($m_X = 5$, $N = 20$).

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne II



Pour mesurer la qualité d'un estimateur, on utilise les notions de "biais" et de "variance" de l'estimateur. Intuitivement, un "bon" estimateur devra posséder les propriétés suivantes :

- Estimateur sans biais : "en moyenne" l'estimateur \hat{M}_i doit donner la vraie valeur du paramètre :

$$\mathbb{E}[\hat{M}_i] = m_x$$

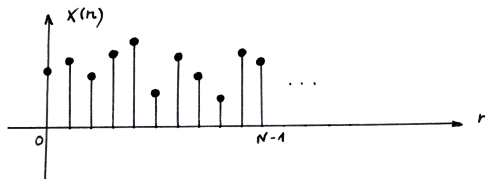
Le biais b de l'estimateur \hat{M}_i est défini par :

$$b(\hat{M}_i) = \mathbb{E}[\hat{M}_i] - m_x$$

- Variance faible : la dispersion des valeurs de \hat{M}_i autour de sa valeur moyenne doit rester faible, ce qui garantit en général d'avoir, suite à une mesure, une valeur proche de la bonne valeur :

$$\sigma^2[\hat{M}_i] = \mathbb{E}[(\hat{M}_i - \mathbb{E}[\hat{M}_i])^2] \text{ faible}$$

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne II



Pour mesurer la qualité d'un estimateur, on utilise les notions de "biais" et de "variance" de l'estimateur. Intuitivement, un "bon" estimateur devra posséder les propriétés suivantes :

- Estimateur sans biais : "en moyenne" l'estimateur \hat{M}_i doit donner la vraie valeur du paramètre :

$$\mathbb{E}[\hat{M}_i] = m_x$$

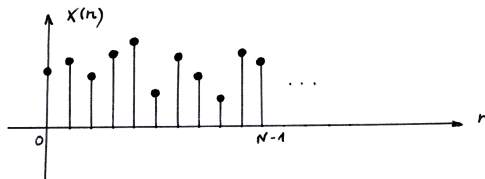
Le biais b de l'estimateur \hat{M}_i est défini par :

$$b(\hat{M}_i) = \mathbb{E}[\hat{M}_i] - m_x$$

- Variance faible : la dispersion des valeurs de \hat{M}_i autour de sa valeur moyenne doit rester faible, ce qui garantit en général d'avoir, suite à une mesure, une valeur proche de la bonne valeur :

$$\sigma^2[\hat{M}_i] = \mathbb{E}[(\hat{M}_i - \mathbb{E}[\hat{M}_i])^2] \text{ faible}$$

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne II



Pour mesurer la qualité d'un estimateur, on utilise les notions de "biais" et de "variance" de l'estimateur. Intuitivement, un "bon" estimateur devra posséder les propriétés suivantes :

- Estimateur sans biais : "en moyenne" l'estimateur \hat{M}_i doit donner la vraie valeur du paramètre :

$$\mathbb{E}[\hat{M}_i] = m_x$$

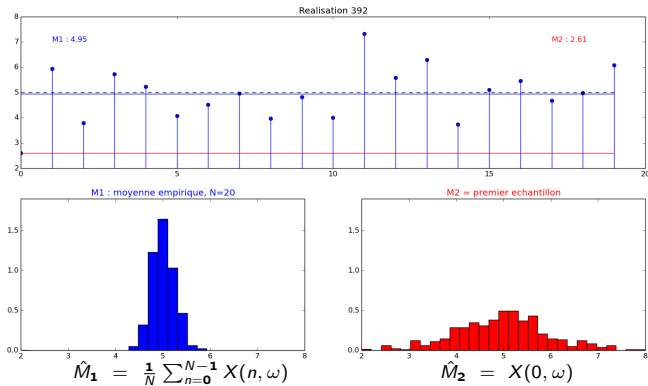
Le biais b de l'estimateur \hat{M}_i est défini par :

$$b(\hat{M}_i) = \mathbb{E}[\hat{M}_i] - m_x$$

- Varianse faible : la dispersion des valeurs de \hat{M}_i autour de sa valeur moyenne doit rester faible, ce qui garantit en général d'avoir, suite à une mesure, une valeur proche de la bonne valeur :

$$\sigma^2[\hat{M}_i] = \mathbb{E}[(\hat{M}_i - \mathbb{E}[\hat{M}_i])^2] \text{ faible}$$

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne III



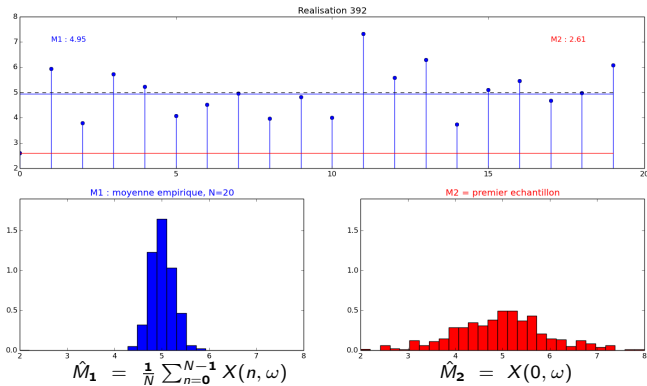
▷ **Biais** : les 2 estimateurs sont non biaisés :

$$\mathbf{E}[\hat{M}_1] = m_X \quad ; \quad \mathbf{E}[\hat{M}_2] = m_X$$

▷ **Variances** : \hat{M}_1 est meilleur et sa variance tend vers 0 quand on augmente le nombre N d'échantillons.

$$\sigma^2[\hat{M}_1] = \frac{\sigma_X^2}{N} \quad ; \quad \sigma^2[\hat{M}_2] = \sigma_X^2$$

Exemple introductif : estimation de la valeur moyenne III



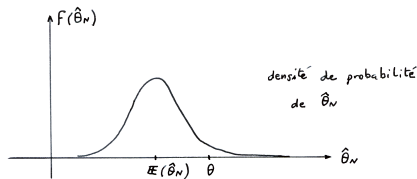
▷ **Biais** : les 2 estimateurs sont non biaisés :

$$\mathbf{E}[\hat{M}_1] = m_X \quad ; \quad \mathbf{E}[\hat{M}_2] = m_X$$

▷ **Variances** : \hat{M}_1 est meilleur et sa variance tend vers 0 quand on augmente le nombre N d'échantillons.

$$\sigma^2[\hat{M}_1] = \frac{\sigma_X^2}{N} \quad ; \quad \sigma^2[\hat{M}_2] = \sigma_X^2$$

Caractéristiques d'un estimateur I



On considère un estimateur $\hat{\theta}_N$ d'une grandeur θ caractérisant un signal aléatoire discret $X(n, \omega)$ (moment d'ordre n , fonction d'autocorrélation, paramètre d'une loi statistique, etc.). $\hat{\theta}_N$ est une variable aléatoire dépendant des échantillons de $X(n, \omega)$ sur $\{0, \dots, N-1\}$.

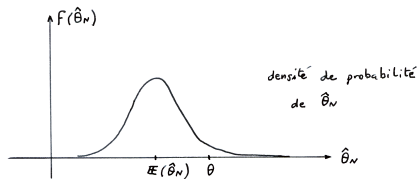
- L'estimateur $\hat{\theta}_N$ est dit non biaisé si :

$$E[\hat{\theta}_N] = \theta$$

- Le biais de l'estimateur est défini par :

$$b(\hat{\theta}_N) = E[\hat{\theta}_N] - \theta$$

Caractéristiques d'un estimateur I



On considère un estimateur $\hat{\theta}_N$ d'une grandeur θ caractérisant un signal aléatoire discret $X(n, \omega)$ (moment d'ordre n , fonction d'autocorrélation, paramètre d'une loi statistique, etc.). $\hat{\theta}_N$ est une variable aléatoire dépendant des échantillons de $X(n, \omega)$ sur $\{0, \dots, N-1\}$.

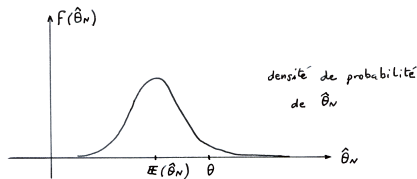
- L'estimateur $\hat{\theta}_N$ est dit non biaisé si :

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_N] = \theta$$

- Le biais de l'estimateur est défini par :

$$b(\hat{\theta}_N) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_N] - \theta$$

Caractéristiques d'un estimateur I



On considère un estimateur $\hat{\theta}_N$ d'une grandeur θ caractérisant un signal aléatoire discret $X(n, \omega)$ (moment d'ordre n , fonction d'autocorrélation, paramètre d'une loi statistique, etc.). $\hat{\theta}_N$ est une variable aléatoire dépendant des échantillons de $X(n, \omega)$ sur $\{0, \dots, N-1\}$.

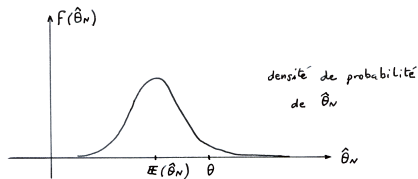
- L'estimateur $\hat{\theta}_N$ est dit non biaisé si :

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_N] = \theta$$

- Le biais de l'estimateur est défini par :

$$b(\hat{\theta}_N) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_N] - \theta$$

Caractéristiques d'un estimateur II



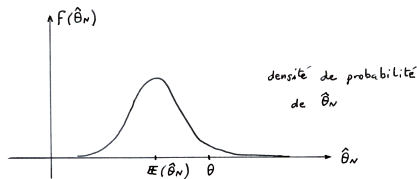
- La variance de l'estimateur est définie par :

$$\sigma^2(\hat{\theta}_N) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_N - \mathbb{E}(\hat{\theta}_N))^2]$$

- L'erreur quadratique moyenne (eqm) de l'estimateur est définie par :

$$\begin{aligned} \text{eqm}(\hat{\theta}_N) &= \mathbb{E}[(\hat{\theta}_N - \theta)^2] \\ &= \sigma^2(\hat{\theta}_N) \quad \text{si } b(\hat{\theta}_N) = 0 \end{aligned}$$

Caractéristiques d'un estimateur II



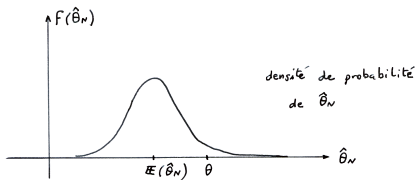
- La variance de l'estimateur est définie par :

$$\sigma^2(\hat{\theta}_N) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_N - \mathbb{E}(\hat{\theta}_N))^2]$$

- L'erreur quadratique moyenne (eqm) de l'estimateur est définie par :

$$\begin{aligned} \text{eqm}(\hat{\theta}_N) &= \mathbb{E}[(\hat{\theta}_N - \Theta)^2] \\ &= \sigma^2(\hat{\theta}_N) \quad \text{si } b(\hat{\theta}_N) = 0 \end{aligned}$$

Estimateur efficace, estimateur consistant



Un bon estimateur doit présenter un biais et une variance les plus faibles possibles.

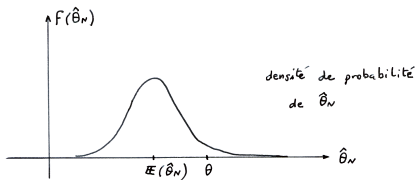
- Un estimateur $\hat{\Theta}_N$ de Θ est dit "efficace" si son biais est nul et si sa variance est plus faible que celle de tout autre estimateur de Θ .
- Un estimateur est dit "consistant" si sa variance et son biais tendent vers 0 lorsque le nombre d'échantillons N augmente. Cette propriété est fortement souhaitée.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} b(\hat{\Theta}_N) = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma^2(\hat{\Theta}_N) = 0$$

Dans la pratique il est parfois difficile de concilier un biais nul avec une variance faible. On préférera alors un estimateur légèrement biaisé, mais de variance faible, à un estimateur non biaisé, mais présentant une variance importante.

Estimateur efficace, estimateur consistant



Un bon estimateur doit présenter un biais et une variance les plus faibles possibles.

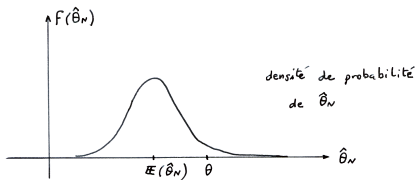
- Un estimateur $\hat{\Theta}_N$ de Θ est dit "efficace" si son biais est nul et si sa variance est plus faible que celle de tout autre estimateur de Θ .
- Un estimateur est dit "consistant" si sa variance et son biais tendent vers 0 lorsque le nombre d'échantillons N augmente. Cette propriété est fortement souhaitée.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} b(\hat{\Theta}_N) = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma^2(\hat{\Theta}_N) = 0$$

Dans la pratique il est parfois difficile de concilier un biais nul avec une variance faible. On préférera alors un estimateur légèrement biaisé, mais de variance faible, à un estimateur non biaisé, mais présentant une variance importante.

Estimateur efficace, estimateur consistant



Un bon estimateur doit présenter un biais et une variance les plus faibles possibles.

- Un estimateur $\hat{\theta}_N$ de θ est dit "efficace" si son biais est nul et si sa variance est plus faible que celle de tout autre estimateur de θ .
- Un estimateur est dit "consistant" si sa variance et son biais tendent vers 0 lorsque le nombre d'échantillons N augmente. Cette propriété est fortement souhaitée.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} b(\hat{\theta}_N) = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma^2(\hat{\theta}_N) = 0$$

Dans la pratique il est parfois difficile de concilier un biais nul avec une variance faible. On préférera alors un estimateur légèrement biaisé, mais de variance faible, à un estimateur non biaisé, mais présentant une variance importante.

Estimation : le maximum de vraisemblance

Il existe de nombreuses méthodes permettant de construire des estimateurs pour les caractéristiques statistiques d'un signal aléatoire. La méthode la plus utilisée est la méthode du *maximum de vraisemblance*.

On cherche à estimer (cas discret) une caractéristique Θ à partir d'un ensemble d'observations : $\{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

- Hypothèse de la méthode : on connaît la distribution (densité de probabilité) conjointe des observations. Cette distribution dépend de Θ :

$$f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N) ; \Theta)$$

- L'estimateur du maximum de vraisemblance est la valeur de Θ qui maximise la «vraisemblance» des données observées $\{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

$$\hat{\Theta}_{mv} = \arg \max_{\Theta} f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N) ; \Theta)$$

- Propriétés de $\hat{\Theta}_{mv}$:
 - ▶ s'il existe un estimateur efficace, c'est forcément $\hat{\Theta}_{mv}$;
 - ▶ sous des conditions «raisonnables», on montre que $\hat{\Theta}_{mv}$ est consistant.

Estimation : le maximum de vraisemblance

Il existe de nombreuses méthodes permettant de construire des estimateurs pour les caractéristiques statistiques d'un signal aléatoire. La méthode la plus utilisée est la méthode du *maximum de vraisemblance*.

On cherche à estimer (cas discret) une caractéristique Θ à partir d'un ensemble d'observations : $\{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

- Hypothèse de la méthode : on connaît la distribution (densité de probabilité) conjointe des observations. Cette distribution dépend de Θ :

$$f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N) ; \Theta)$$

- L'estimateur du maximum de vraisemblance est la valeur de Θ qui maximise la «vraisemblance» des données observées $\{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

$$\hat{\Theta}_{mv} = \arg \max_{\Theta} f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N) ; \Theta)$$

- Propriétés de $\hat{\Theta}_{mv}$:

- ▶ s'il existe un estimateur efficace, c'est forcément $\hat{\Theta}_{mv}$;
- ▶ sous des conditions «raisonnables», on montre que $\hat{\Theta}_{mv}$ est consistant.

Estimation : le maximum de vraisemblance

Il existe de nombreuses méthodes permettant de construire des estimateurs pour les caractéristiques statistiques d'un signal aléatoire. La méthode la plus utilisée est la méthode du *maximum de vraisemblance*.

On cherche à estimer (cas discret) une caractéristique Θ à partir d'un ensemble d'observations : $\{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

- Hypothèse de la méthode : on connaît la distribution (densité de probabilité) conjointe des observations. Cette distribution dépend de Θ :

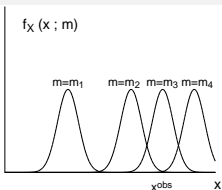
$$f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N) ; \Theta)$$

- L'estimateur du maximum de vraisemblance est la valeur de Θ qui maximise la «vraisemblance» des données observées $\{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

$$\hat{\Theta}_{mv} = \arg \max_{\Theta} f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N) ; \Theta)$$

- Propriétés de $\hat{\Theta}_{mv}$:
 - ▶ s'il existe un estimateur efficace, c'est forcément $\hat{\Theta}_{mv}$;
 - ▶ sous des conditions «raisonnables», on montre que $\hat{\Theta}_{mv}$ est consistant.

Exemple : estimation de la valeur moyenne



On souhaite estimer la valeur moyenne statistique m d'un signal aléatoire $X(n, \omega)$ correspondant à un bruit blanc gaussien de moyenne non nulle. On observe : $x^{obs} = \{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

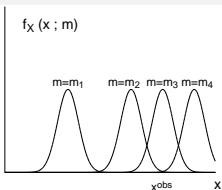
$$f_{X(k)}(x; m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad k = 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned} f_{X(1)X(2)\dots X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N); m) \\ = \prod_{i=1}^N f_{X(i)}(x(i); m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^N} \exp\left\{-\sum_{i=1}^N \frac{(x(i)-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \arg \max_m f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N); m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad \text{moyenne empirique} \end{aligned}$$

Exemple : estimation de la valeur moyenne



On souhaite estimer la valeur moyenne statistique m d'un signal aléatoire $X(n, \omega)$ correspondant à un bruit blanc gaussien de moyenne non nulle. On observe : $x^{obs} = \{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

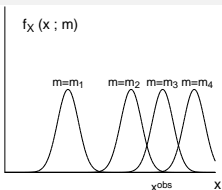
$$f_{X(k)}(x; m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad k = 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned} f_{X(1)X(2)\dots X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N); m) \\ = \prod_{i=1}^N f_{X(i)}(x(i); m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^N} \exp\left\{-\sum_{i=1}^N \frac{(x(i)-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \arg \max_m f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N); m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad \text{moyenne empirique} \end{aligned}$$

Exemple : estimation de la valeur moyenne



On souhaite estimer la valeur moyenne statistique m d'un signal aléatoire $X(n, \omega)$ correspondant à un bruit blanc gaussien de moyenne non nulle. On observe : $x^{obs} = \{x(n), n = 1, \dots, N\}$.

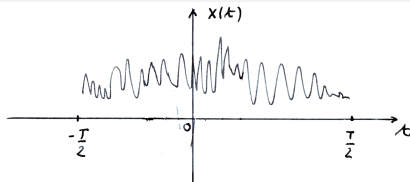
$$f_{X(k)}(x; m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad k = 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned} f_{X(1)X(2)\dots X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N); m) \\ = \prod_{i=1}^N f_{X(i)}(x(i); m) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^N} \exp\left\{-\sum_{i=1}^N \frac{(x(i)-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \arg \max_m f_{X(1), X(2), \dots, X(N)}(x(1), x(2), \dots, x(N); m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad \text{moyenne empirique} \end{aligned}$$

Estimateurs classiques : valeur moyenne $m_X = \mathbb{E}[X(t)]$



Signal : $X(t)$ observé sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

- Estimateur :

$$\hat{m}_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) dt$$

- Biais :

$$\mathbb{E}[\hat{m}_T] = m_X$$

$$b(\hat{m}_T) = 0$$

- Variance :

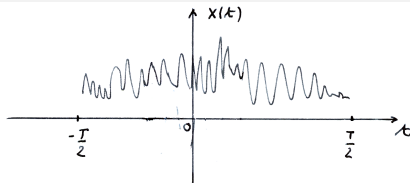
$$\sigma^2(\hat{m}_T) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) (R_X(\tau) - m_X^2) d\tau$$

- L'estimateur est consistant pour les signaux qui présentent une décorrélation à l'infini :

$$\text{Si } \lim_{T \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = m_X^2, \text{ alors } \lim_{T \rightarrow +\infty} \sigma^2(\hat{m}_T) = 0$$

Cette propriété est en général vérifiée.

Estimateurs classiques : valeur moyenne $m_X = \mathbb{E}[X(t)]$



Signal : $X(t)$ observé sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

- Estimateur :

$$\hat{m}_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) dt$$

- Biais :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{m}_T] &= m_X \\ b(\hat{m}_T) &= 0\end{aligned}$$

- Variance :

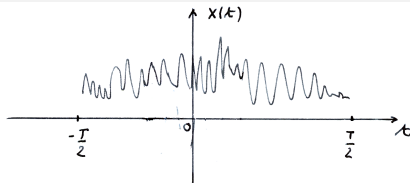
$$\sigma^2(\hat{m}_T) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) (R_X(\tau) - m_X^2) d\tau$$

- L'estimateur est consistant pour les signaux qui présentent une décorrélation à l'infini :

$$\text{Si } \lim_{T \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = m_X^2, \text{ alors } \lim_{T \rightarrow +\infty} \sigma^2(\hat{m}_T) = 0$$

Cette propriété est en général vérifiée.

Estimateurs classiques : valeur moyenne $m_X = \mathbb{E}[X(t)]$



Signal : $X(t)$ observé sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

- Estimateur :

$$\hat{m}_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) dt$$

- Biais :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{m}_T] &= m_X \\ b(\hat{m}_T) &= 0 \end{aligned}$$

- Variance :

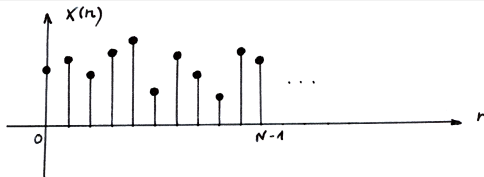
$$\sigma^2(\hat{m}_T) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) (R_X(\tau) - m_X^2) d\tau$$

- L'estimateur est consistant pour les signaux qui présentent une décorrélation à l'infini :

$$\text{Si } \lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = m_X^2, \text{ alors } \lim_{T \rightarrow +\infty} \sigma^2(\hat{m}_T) = 0$$

Cette propriété est en général vérifiée.

Estimateurs classiques : valeur moyenne $m_X = \mathbb{E}[X(n)]$



Signal : $X(n)$ observé sur $\{0, \dots, N-1\}$

- Estimateur :

$$\hat{m}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)$$

- Biais :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{m}_N] &= m_X \\ b(\hat{m}_N) &= 0\end{aligned}$$

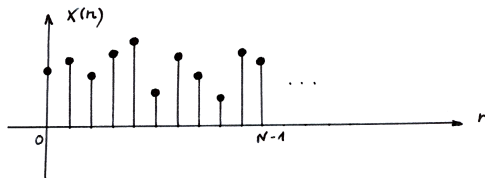
- Variance :

$$\sigma^2(\hat{m}_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) (R_X(k) - m_X^2)$$

- L'estimateur est consistant pour les signaux qui présentent une décorrélation à l'infini :

$$\text{Si } \lim_{k \rightarrow +\infty} R_X(k) = m_X^2, \text{ alors } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma^2(\hat{m}_N) = 0$$

Estimateurs classiques : variance σ_X^2



- Cas où la moyenne m_X est connue

- ▶ Cas continu :

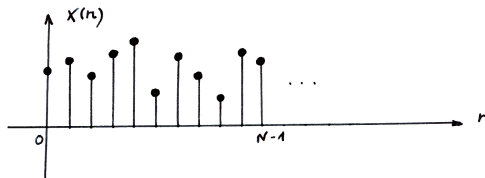
$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (X(t) - m_X)^2 dt$$

- ▶ Cas discret :

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (X(n) - m_X)^2$$

- ▶ Estimateur non biaisé (et en général consistant si décorrélation à l'infini).

Estimateurs classiques : variance σ_X^2 (formule I)



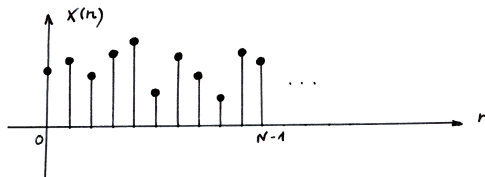
- Cas où la moyenne m_X est également estimée (formules I)

- ▶ Cas discret :

$$\hat{m}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)$$
$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (X(n) - \hat{m}_N)^2$$

- ▶ Estimateur biaisé : $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_N^2] = \sigma_X^2 \left(\frac{N-1}{N} \right)$, généralement consistant.

Estimateurs classiques : variance σ_X^2 (formule II)



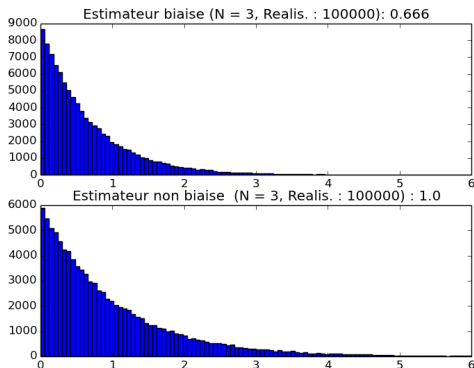
- Cas où la moyenne m_X est également estimée (formules II)

► Cas discret :

$$\hat{m}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)$$
$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (X(n) - \hat{m}_N)^2$$

- Estimateur non biaisé : $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_N^2] = \sigma_X^2$, de variance supérieure au précédent, généralement consistant.

Estimateurs classiques : variance



Distribution des valeurs des deux estimateurs de la variance σ_X^2 ($N = 3$, 10^5 réalisations)

Les échantillons du signal suivent ici une loi normale de moyenne $m_X = 0$, de variance $\sigma_X^2 = 1$.

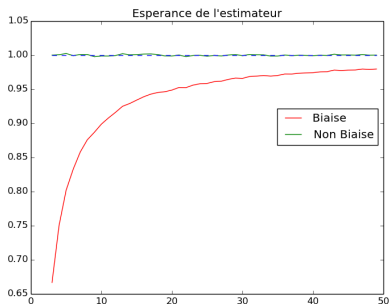
La distribution des deux estimateurs est alors une loi du χ^2 à $N-1$ degrés de liberté.

Moyenne de ces distributions (calculées sur 10^5 réalisations) :

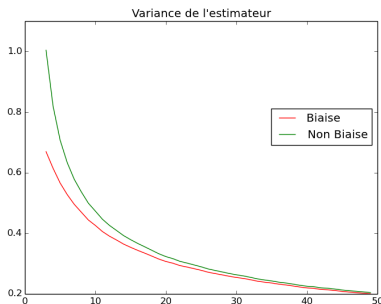
Estimateur biaisé : $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_N^2] \simeq 0,666 (= \sigma_X^2(\frac{N-1}{N}) = \frac{2}{3})$

Estimateur non biaisé : $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_N^2] \simeq 1,000 (= \sigma_X^2)$.

Estimateurs classiques : variance



a



b

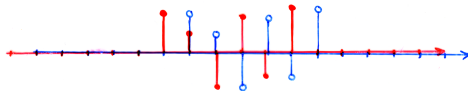
Biais et variance des deux estimateurs de la variance σ_X^2 (N variable, 10^5 réalisations) (échantillons suivant une loi normale de moyenne $m_X = 0$, de variance $\sigma_X^2 = 1$)

a) Moyenne statistique $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_N^2]$ des deux estimateurs (100000 réalisations) en fct. de N

b) Variance $\mathbb{E}[(\hat{\sigma}_N^2 - \mathbb{E}(\hat{\sigma}_N^2))^2]$ des deux estimateurs (100000 réalisations) en fct. de N .

On voit que les deux estimateurs sont consistants.

Estimateurs classiques : fonction d'autocorrélation

$$R_X(k) = \mathbb{E}[X(n)X(n-k)] = \mathbb{E}[X(n+k)X(n)]$$


Signal : $X(n)$ observé sur $\{0, \dots, N-1\}$

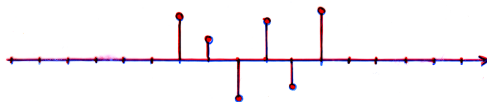
- Formules :

$$\hat{R}_{1N}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n)X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

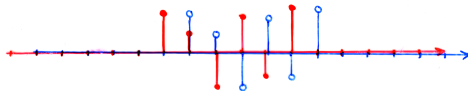
$$\hat{R}_{2N}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n)X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

Ces estimateurs interviennent en particulier dans l'estimation de la d.s.p. des signaux aléatoires.

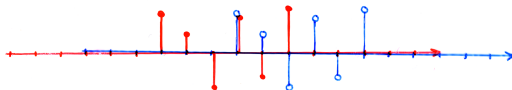
Estimateurs classiques : fonction d'autocorrélation



décalage $k = 0$: 6 termes



décalage $k = 1$: 5 termes

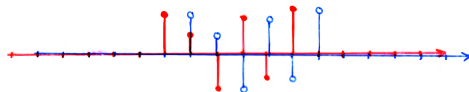


décalage $k = 3$: 3 termes

Exemple : estimation de la fonction d'autocorrélation avec $N = 6$ points

$$\hat{R}_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{ ou } \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n)X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

Estimateurs classiques : fonction d'autocorrélation



Cas discret : signal $X(n)$ observé sur $\{0, \dots, N-1\}$

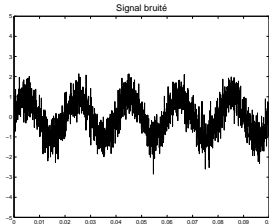
- Formules :

$$\hat{R}_{1N}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n)X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

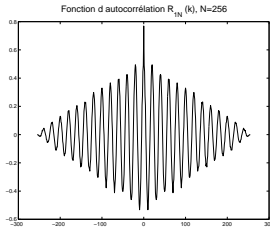
$$\hat{R}_{2N}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n)X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

- \hat{R}_{1N} est biaisé
- \hat{R}_{2N} est non biaisé. Toutefois sa variance croît fortement lorsque $k \rightarrow N-1$.
- Les deux estimateurs sont consistants.

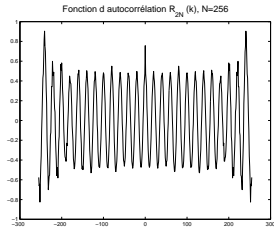
On préfère généralement \hat{R}_{1N} qui est biaisé, mais dont la variance est inférieure.



signal $x(t)$



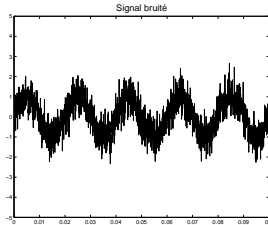
estimateur biaisé, de variance faible



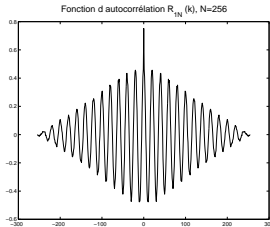
estimateur non biaisé, de variance forte

Estimateurs de la fonction d'autocorrélation

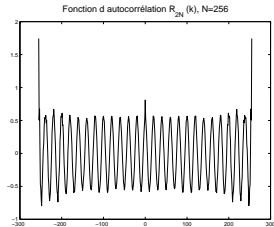
Signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + b(t)$ - 1ère réalisation



signal $x(t)$



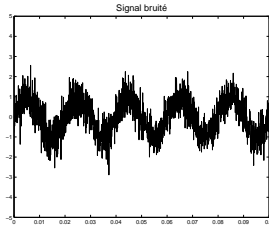
estimateur biaisé, de variance faible



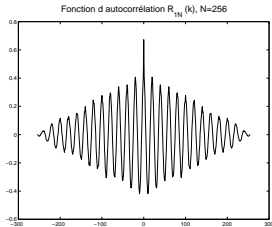
estimateur non biaisé, de variance forte

Estimateurs de la fonction d'autocorrélation

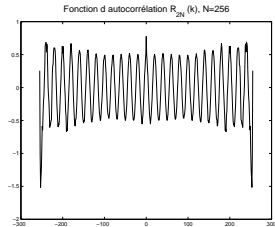
Signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + b(t)$ - 2ème réalisation



signal $x(t)$



estimateur biaisé, de variance faible



estimateur non biaisé, de variance forte

Estimateurs de la fonction d'autocorrélation

Signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + b(t)$ - 3ème réalisation

Estimateurs classiques : fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$

Cas continu : signal $X(t)$ observé sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

- Deux estimateurs sont classiquement utilisés :

$$\hat{R}_{1T}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-(\frac{T}{2}-|\frac{\tau}{2}|)}^{\frac{T}{2}-|\frac{\tau}{2}|} X(t+\frac{\tau}{2})X(t-\frac{\tau}{2})dt & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

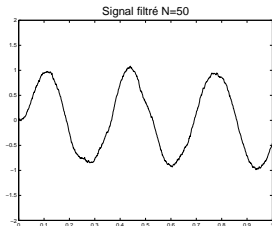
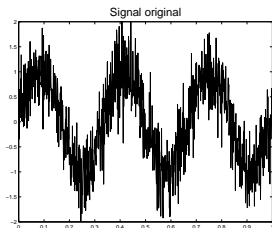
$$\hat{R}_{2T}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T-|\tau|} \int_{-(\frac{T}{2}-|\frac{\tau}{2}|)}^{\frac{T}{2}-|\frac{\tau}{2}|} X(t+\frac{\tau}{2})X(t-\frac{\tau}{2})dt & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

- \hat{R}_{1T} est biaisé :

$$\mathbb{E}[\hat{R}_{1T}] = \begin{cases} \frac{1}{T} (T - |\tau|) R_X(\tau) & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

- L'estimateur \hat{R}_{2T} est non biaisé. Toutefois sa variance croît fortement lorsque $\tau \rightarrow T$.
- Les deux estimateurs sont consistants.

On préfère souvent \hat{R}_{1T} qui est biaisé, mais dont la variance est inférieure.

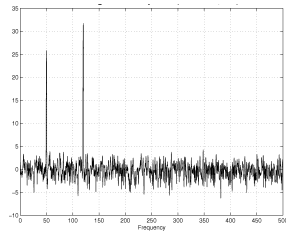
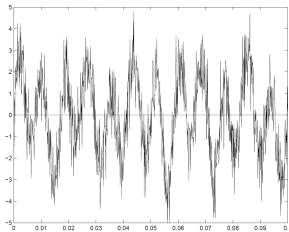


TRAITEMENT DES SIGNAUX ALÉATOIRES

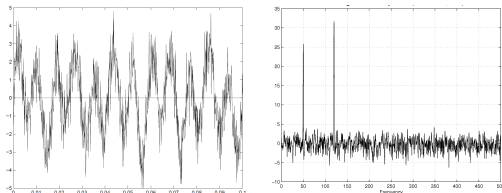
Partie 7

Partie 7

ESTIMATION SPECTRALE



Introduction à l'estimation spectrale

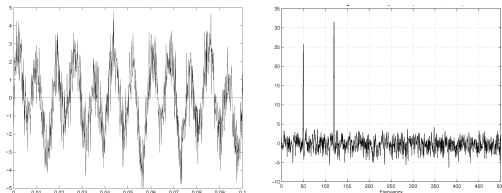


Le problème de l'estimation spectrale (ou analyse spectrale) est d'estimer la d.s.p. $S_X(f)$ d'un signal aléatoire $X(t)$ à partir d'une réalisation de ce signal sur une fenêtre d'observation finie.

Deux familles d'approches sont actuellement employées :

- Les approches dites "classiques" qui reposent sur la T.F. du signal ou sur la T.F. de sa fonction d'autocorrélation.
- les approches "modernes" s'appuyant sur une modélisation paramétrique de la d.s.p. : modèles autorégressifs, ARMA, méthode de Prony, de Capon, de Pisarenko, etc. Ces méthodes ne sont pas décrites ici (voir [Kay88]).

Introduction à l'estimation spectrale

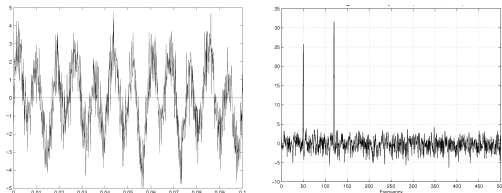


Le problème de l'estimation spectrale (ou analyse spectrale) est d'estimer la d.s.p. $S_X(f)$ d'un signal aléatoire $X(t)$ à partir d'une réalisation de ce signal sur une fenêtre d'observation finie.

Deux familles d'approches sont actuellement employées :

- Les approches dites "classiques" qui reposent sur la T.F. du signal ou sur la T.F. de sa fonction d'autocorrélation.
- les approches "modernes" s'appuyant sur une modélisation paramétrique de la d.s.p. : modèles autorégressifs, ARMA, méthode de Prony, de Capon, de Pisarenko, etc. Ces méthodes ne sont pas décrites ici (voir [Kay88]).

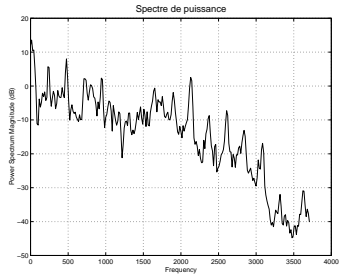
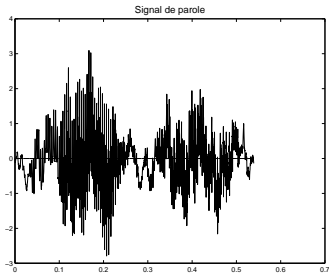
Introduction à l'estimation spectrale



Le problème de l'estimation spectrale (ou analyse spectrale) est d'estimer la d.s.p. $S_X(f)$ d'un signal aléatoire $X(t)$ à partir d'une réalisation de ce signal sur une fenêtre d'observation finie.

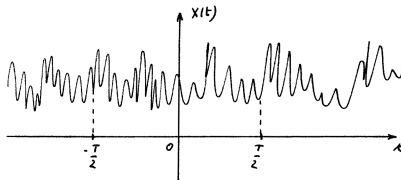
Deux familles d'approches sont actuellement employées :

- Les approches dites "classiques" qui reposent sur la T.F. du signal ou sur la T.F. de sa fonction d'autocorrélation.
- les approches "modernes" s'appuyant sur une modélisation paramétrique de la d.s.p. : modèles autorégressifs, ARMA, méthode de Prony, de Capon, de Pisarenko, etc. Ces méthodes ne sont pas décrites ici (voir [Kay88]).



Estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal de parole
(méthode du périodogramme moyenné)

Fenêtre d'observation, résolution spectrale

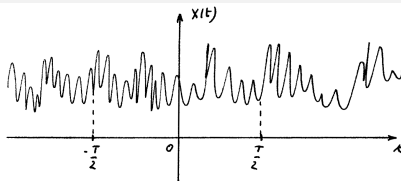


Le signal ne peut être observé que sur une fenêtre d'observation de taille finie. Ceci revient à tronquer le signal, c'est-à-dire à le multiplier par une fenêtre rectangulaire.

Comme pour les signaux déterministes, cette troncature du signal va limiter la résolution de l'analyse spectrale des signaux aléatoires.

Supposons que l'on observe le signal $x(t)$ à travers une fenêtre d'observation finie $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Le signal $x(t)$ tronqué sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ est noté $x_T(t)$.

Fenêtre d'observation, résolution spectrale



Il vient : $x_T(t) = x(t) w(t)$ avec :

$$\begin{cases} w(t) = 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ w(t) = 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

d'où :

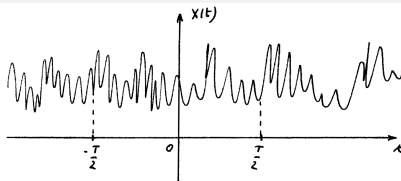
$$X_T(f) = X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f}$$

$$S_x(f) \simeq \frac{1}{T} |X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f}|^2$$

Pour une « fréquence pure » $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$:

$$S_x(f) \simeq \frac{1}{T} \left| \frac{\sin \pi (f - f_0) T}{\pi (f - f_0)} \right|^2$$

Fenêtre d'observation, résolution spectrale



Il vient : $x_T(t) = x(t) w(t)$ avec :

$$\begin{cases} w(t) = 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ w(t) = 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

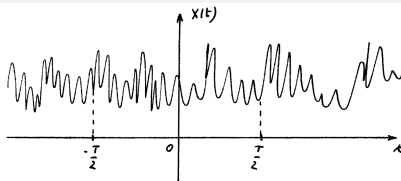
d'où :

$$X_T(f) = X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f}$$
$$S_x(f) \simeq \frac{1}{T} |X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f}|^2$$

Pour une « fréquence pure » $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$:

$$S_x(f) \simeq \frac{1}{T} \left| \frac{\sin \pi (f - f_0) T}{\pi (f - f_0)} \right|^2$$

Fenêtre d'observation, résolution spectrale



Il vient : $x_T(t) = x(t) w(t)$ avec :

$$\begin{cases} w(t) = 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ w(t) = 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

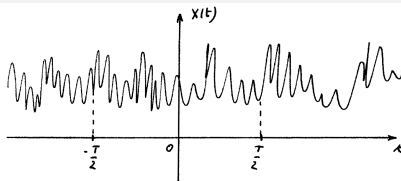
d'où :

$$\begin{aligned} X_T(f) &= X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f} \\ S_x(f) &\simeq \frac{1}{T} |X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f}|^2 \end{aligned}$$

Pour une « fréquence pure » $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$:

$$S_x(f) \simeq \frac{1}{T} \left| \frac{\sin \pi(f - f_0)T}{\pi(f - f_0)} \right|^2$$

Fenêtre d'observation, résolution spectrale



Il vient : $x_T(t) = x(t) w(t)$ avec :

$$\begin{cases} w(t) = 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ w(t) = 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

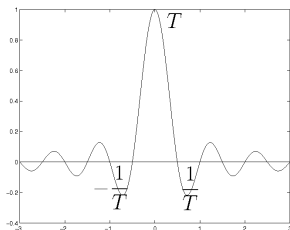
d'où :

$$\begin{aligned} X_T(f) &= X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f} \\ S_x(f) &\simeq \frac{1}{T} |X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f}|^2 \end{aligned}$$

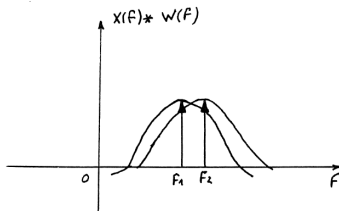
Pour une « fréquence pure » $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$:

$$S_x(f) \simeq \frac{1}{T} \left| \frac{\sin \pi(f - f_0)T}{\pi(f - f_0)} \right|^2$$

Fenêtre d'observation, résolution spectrale



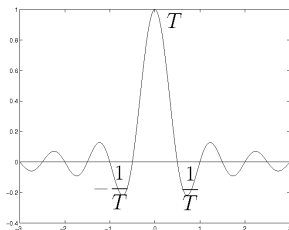
fonction $\frac{\sin \pi f T}{\pi f}$



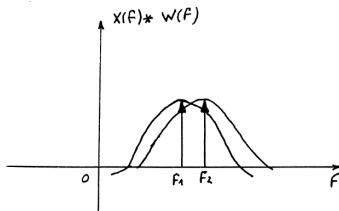
La convolution de $X(f)$ par le sinus cardinal rend impossible la séparation en fréquence de deux sinusoïdes dont les fréquences f_1 et f_2 se retrouvent dans le lobe principal du sinus cardinal.

La résolution de l'analyse spectrale est donc physiquement limitée par la largeur de la fenêtre d'analyse. On ne peut « résoudre » deux sinusoïdes séparées de moins de $\frac{1}{T}$ où T est la largeur de la fenêtre d'analyse du signal.

Fenêtre d'observation, résolution spectrale



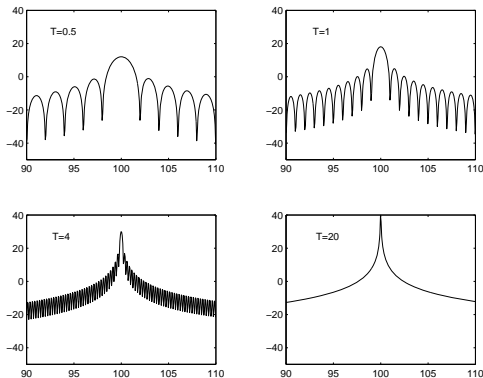
fonction $\frac{\sin \pi f T}{\pi f}$



La convolution de $X(f)$ par le sinus cardinal rend impossible la séparation en fréquence de deux sinusoïdes dont les fréquences f_1 et f_2 se retrouvent dans le lobe principal du sinus cardinal.

La résolution de l'analyse spectrale est donc physiquement limitée par la largeur de la fenêtre d'analyse. On ne peut « résoudre » deux sinusoïdes séparées de moins de $\frac{1}{T}$ où T est la largeur de la fenêtre d'analyse du signal.

Fenêtre d'observation, résolution spectrale

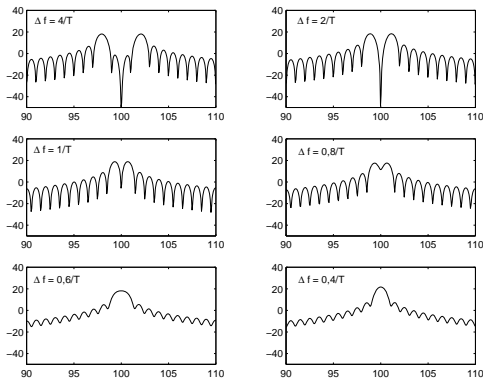


spectres de puissance du signal :

$$\cos(2\pi f_0 t) ; \quad f_0 = 100$$

(fenêtre d'observation rect. de largeur T variable)

Fenêtre d'observation, résolution spectrale

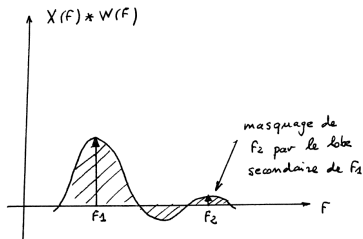


spectres de puissance du signal :

$$\cos(2\pi(f_0 - \frac{\Delta f}{2})t) + \cos(2\pi(f_0 + \frac{\Delta f}{2})t)$$

(fenêtre d'observation rect. de largeur $T = 1$, Δf variable)

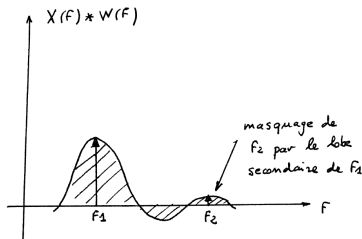
Effet de masquage des signaux faibles



Les lobes secondaires du sinus cardinal viendront également masquer les composantes fréquentielles plus éloignées mais de faible amplitude.

Pour pallier cet inconvénient on multiplie généralement le signal avant analyse par une fenêtre dite d'« apodisation » (autre que la fenêtre rectangulaire), qui présente des lobes secondaires moins élevés. Le gain au niveau des lobes secondaires se paie par un élargissement du lobe principal (perte en résolution spectrale). La fenêtre « de Hamming » offre un bon compromis.

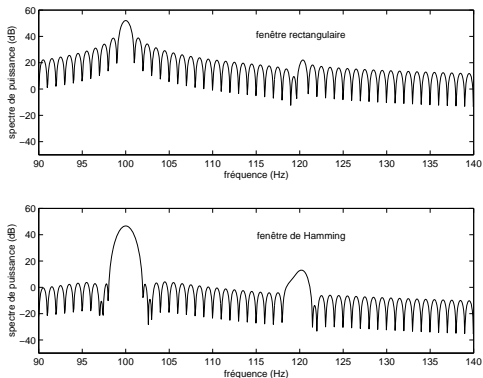
Effet de masquage des signaux faibles



Les lobes secondaires du sinus cardinal viendront également masquer les composantes fréquentielles plus éloignées mais de faible amplitude.

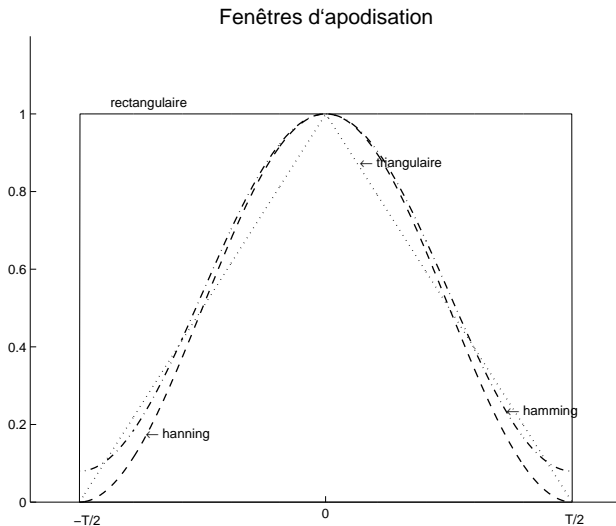
Pour pallier cet inconvénient on multiplie généralement le signal avant analyse par une fenêtre dite d'« apodisation » (autre que la fenêtre rectangulaire), qui présente des lobes secondaires moins élevés. Le gain au niveau des lobes secondaires se paie par un élargissement du lobe principal (perte en résolution spectrale). La fenêtre « de Hamming » offre un bon compromis.

Effet de masquage des signaux faibles

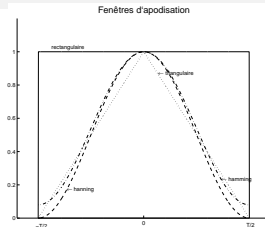


Effet de masquage : spectres de puissance du signal :
 $50 \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_1 t)$; $f_0 = 100$, $f_1 = 120$
(fenêtres d'apodisation de même largeur)

Fenêtres d'apodisation classiques

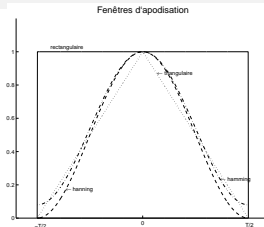


Fenêtres d'apodisation : cas continu



Nom	Définition de $w(k)$	1/2-largeur du lobe principal de $W(f)$	Niveau des lobes secondaires de $W(f)$
Rectangulaire	$w(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{T}$	- 13 dB
Triangulaire	$w(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T/2} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{T}$	- 26 dB
Hanning	$w(t) = \begin{cases} 0,5 + 0,5 \cos \frac{\pi t}{T/2} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{T}$	- 32 dB
Hamming	$w(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi t}{T/2} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{T}$	- 43 dB

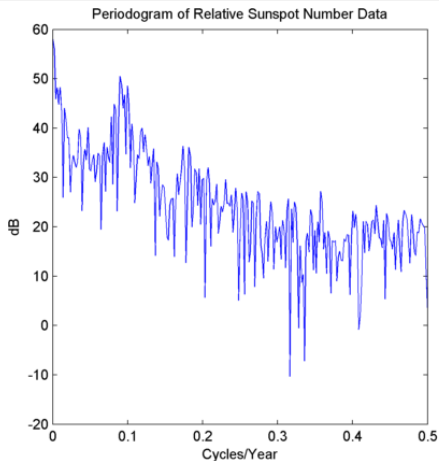
Fenêtres d'apodisation : cas discret



Nom	Définition de $w(k)$	1/2-largeur du lobe principal de $W(f)$	Niveau des lobes secondaires de $W(f)$
Rectangulaire	$w(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{N}$	- 13 dB
Triangulaire	$w(k) = \begin{cases} 1 - \frac{k - \frac{(N-1)}{2}}{\frac{(N-1)}{2}} & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{N}$	- 26 dB
Hanning	$w(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi \left(k - \frac{(N-1)}{2} \right)}{\frac{(N-1)}{2}} & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{N}$	- 32 dB
Hamming	$w(k) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi \left(k - \frac{(N-1)}{2} \right)}{\frac{(N-1)}{2}} & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{N}$	- 43 dB

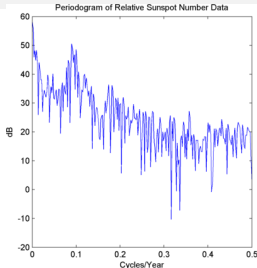
(cas discret, N impair, le niveau des lobes secondaires est celui observé sur la densité spectrale de puissance)

Estimation spectrale des signaux aléatoires



source : Mathworks (sunspot.dat)

Estimation spectrale I : le périodogramme



C'est un estimateur de la d.s.p. qui consiste à calculer le module au carré de la T.F. de $X_T(t)$ (considéré comme un signal déterministe) (Schuster 1898).

- Cas continu :

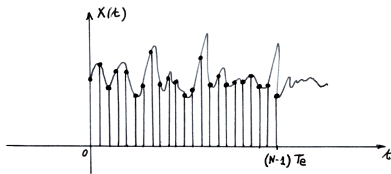
$$\hat{S}_T(f) = \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 \quad f \text{ en Hz, } \hat{S}_T \text{ en } W.Hz^{-1}.$$

- Cas discret :

$$\hat{S}_N(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j2\pi kf} \right|^2$$

f en cycles/échantillon, \hat{S}_T en $W.(cycles/échantillon)^{-1}$. $\hat{S}_N(f)$ est périodique de période 1.

Implantation sur ordinateur pour un signal échantillonné



- Dans le cas d'un signal discret obtenu par échantillonnage d'un signal analogique à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$, la formule précédente devient :

$$\hat{S}_N(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(kT_e) e^{-j2\pi k T_e f} \right|^2$$

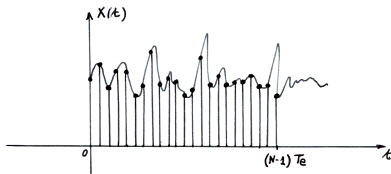
$\hat{S}_N(f)$ est périodique de période f_e . f en Hz, \hat{S}_N en $W.Hz^{-1}$.

- Pour le calcul numérique sur ordinateur, f étant une variable continue doit être discrétisée. On calcule la T.F.D. qui consiste à échantillonner $\hat{S}_N(f)$ sur une période par :

$$f = \frac{n}{N} f_e \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$\hat{S}_N(n) = \hat{S}_N\left(\frac{n}{N} f_e\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(kT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right|^2 \quad n = 0, \dots, N-1$$

Implantation sur ordinateur pour un signal échantillonné



- Dans le cas d'un signal discret obtenu par échantillonnage d'un signal analogique à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$, la formule précédente devient :

$$\hat{S}_N(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(kT_e) e^{-j2\pi k T_e f} \right|^2$$

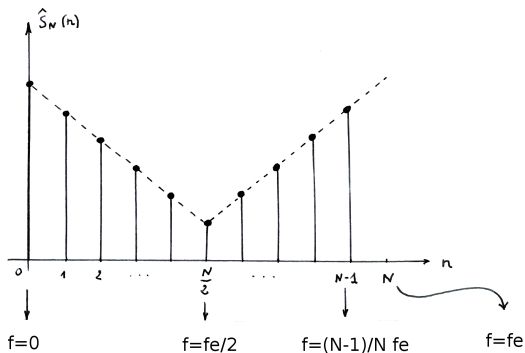
$\hat{S}_N(f)$ est périodique de période f_e . f en Hz , \hat{S}_N en $\text{W} \cdot \text{Hz}^{-1}$.

- Pour le calcul numérique sur ordinateur, f étant une variable continue doit être discrétisée. On calcule la T.F.D. qui consiste à échantillonner $\hat{S}_N(f)$ sur une période par :

$$f = \frac{n}{N} f_e \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$\hat{S}_N(n) = \hat{S}_N\left(\frac{n}{N} f_e\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(kT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right|^2 \quad n = 0, \dots, N-1$$

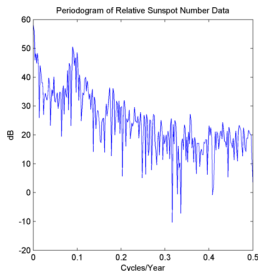
Implantation sur ordinateur pour un signal échantillonné



- ▷ Le calcul se fait par la Transformée de Fourier Rapide (FFT).
- ▷ Abscisse : échelle des fréquences dans le cas d'une utilisation de la FFT :

$$\text{échantillon } n \longleftrightarrow \text{fréq. } f = \frac{n}{N} f_e$$

Propriétés du périodogramme



- Le périodogramme est un estimateur biaisé de la d.s.p. mais il est asymptotiquement non biaisé :

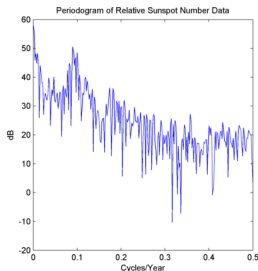
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} b(\hat{S}_T(f)) = 0 \quad , \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} b(\hat{S}_N(f)) = 0$$

- Par contre sa variance ne diminue pas lorsque T (ou N) $\rightarrow +\infty$ (estimateur non consistant). On montre que sa variance ne dépend pratiquement pas de T ou N :

$$\sigma^2(\hat{S}_T(f)) \propto |S_X(f)|^2 \quad , \quad \sigma^2(\hat{S}_N(f)) \propto |S_X(f)|^2$$

La variance est constante (en fonction de T ou N) et est maximale pour les pics du spectre de X . Le périodogramme est donc un **mauvais estimateur spectral** !

Propriétés du périodogramme



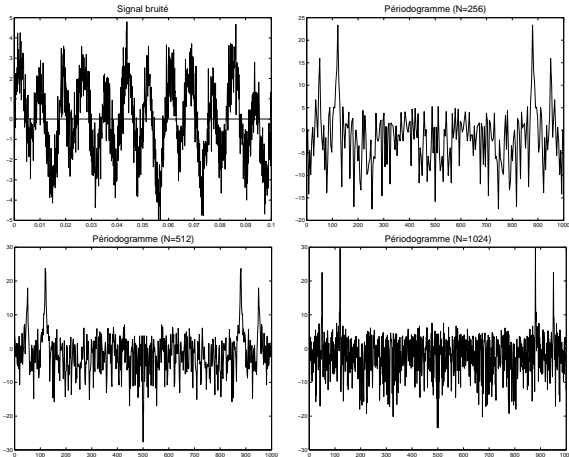
- Le périodogramme est un estimateur biaisé de la d.s.p. mais il est asymptotiquement non biaisé :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} b(\hat{S}_T(f)) = 0 \quad , \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} b(\hat{S}_N(f)) = 0$$

- Par contre sa variance ne diminue pas lorsque T (ou N) $\rightarrow +\infty$ (estimateur non consistant). On montre que sa variance ne dépend pratiquement pas de T ou N :

$$\sigma^2(\hat{S}_T(f)) \propto |S_X(f)|^2 \quad , \quad \sigma^2(\hat{S}_N(f)) \propto |S_X(f)|^2$$

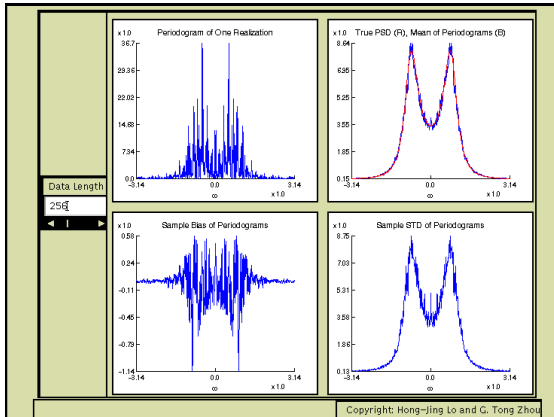
La variance est constante (en fonction de T ou N) et est maximale pour les pics du spectre de X . Le périodogramme est donc un **mauvais estimateur spectral** !



Périodogramme sur N points du signal ($N=256, 512, 1024$) :

$$x(t) = \sin 2\pi 50t + 2 \sin 2\pi 120t + b(t)$$

($b(t)$ est un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2 = 1$)



Périodogramme d'un signal aléatoire ($N=256$, 200 réalisations) :

- a) Périodogramme d'une réalisation
- b) Densité spectrale de puissance théorique (rouge). Moyenne de 200 périodogrammes (bleu).
- c) Biais du périodogramme, estimé sur 200 réalisations.
- d) Ecart-type du périodogramme, estimé sur 200 réalisations.

Source : G. Tong Zhou, Georgia Tech Shanghai

<http://users.ece.gatech.edu/~gtz/java/periodogram/notes.html>

Estimation spectrale II : le corrélogramme

C'est un estimateur de la d.s.p. qui consiste à calculer la T.F. d'une estimée de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

- Cas continu :

$$\hat{S}_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_T(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

avec :

$$\hat{R}_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-(\frac{T}{2}-|\frac{\tau}{2}|)}^{\frac{T}{2}-|\frac{\tau}{2}|} X(t + \frac{\tau}{2}) X(t - \frac{\tau}{2}) dt & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

- Cas discret :

$$\hat{S}_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{R}_N(k) e^{-j2\pi k f}$$

avec :

$$\hat{R}_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n) X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

- Relation avec le périodogramme :

On montre que si $X(t)$ est réel, le corrélogramme et le périodogramme coïncident ! Les propriétés du corrélogramme sont donc les mêmes que celles du périodogramme : elles sont mauvaises ! Pour améliorer ces propriétés on a recours à des versions "lissées" ou "moyennées" de ces estimateurs.

Estimation spectrale II : le corrélogramme

C'est un estimateur de la d.s.p. qui consiste à calculer la T.F. d'une estimée de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

- Cas continu :

$$\hat{S}_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_T(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

avec :

$$\hat{R}_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-(\frac{T}{2}-|\frac{\tau}{2}|)}^{\frac{T}{2}-|\frac{\tau}{2}|} X(t + \frac{\tau}{2}) X(t - \frac{\tau}{2}) dt & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

- Cas discret :

$$\hat{S}_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{R}_N(k) e^{-j2\pi kf}$$

avec :

$$\hat{R}_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n) X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

- Relation avec le périodogramme :

On montre que si $X(t)$ est réel, le corrélogramme et le périodogramme coïncident ! Les propriétés du corrélogramme sont donc les mêmes que celles du périodogramme : elles sont mauvaises ! Pour améliorer ces propriétés on a recours à des versions "lissées" ou "moyennées" de ces estimateurs.

Estimation spectrale II : le corrélogramme

C'est un estimateur de la d.s.p. qui consiste à calculer la T.F. d'une estimée de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

- Cas continu :

$$\hat{S}_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_T(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

avec :

$$\hat{R}_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-(\frac{T}{2}-\frac{|\tau|}{2})}^{\frac{T}{2}-\frac{|\tau|}{2}} X(t + \frac{\tau}{2}) X(t - \frac{\tau}{2}) dt & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

- Cas discret :

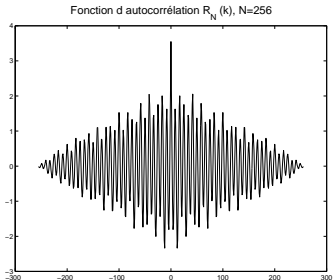
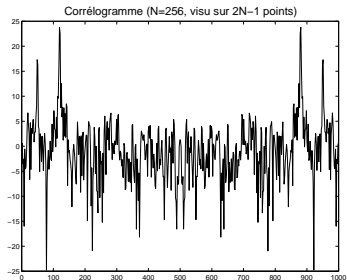
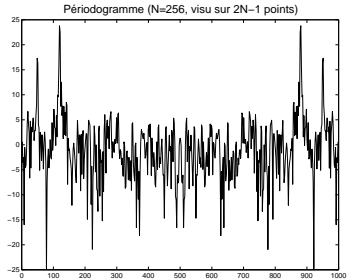
$$\hat{S}_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{R}_N(k) e^{-j2\pi kf}$$

avec :

$$\hat{R}_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n) X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

- Relation avec le périodogramme :

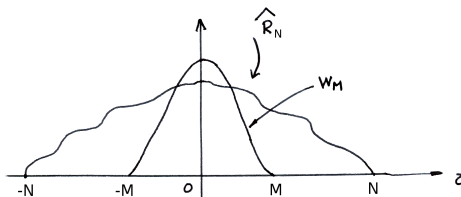
On montre que si $X(t)$ est réel, le corrélogramme et le périodogramme coïncident ! Les propriétés du corrélogramme sont donc les mêmes que celles du périodogramme : elles sont mauvaises ! Pour améliorer ces propriétés on a recours à des versions "lissées" ou "moyennées" de ces estimateurs.



Périodogramme et corrélogramme coïncident !

Signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + 2 \sin 2\pi 120t + b(t)$

Estimation spectrale III : le corrélogramme lissé

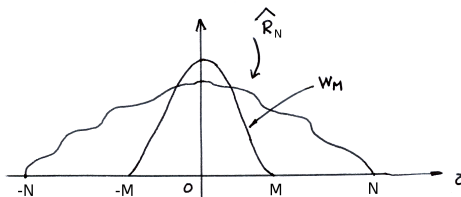


Le corrélogramme ou périodogramme lissé (Blackman-Tukey 1958) consiste (cas discret) :

- à estimer la fonction d'autocorrélation $\hat{R}_N(k)$, $-N < k < N$ à partir du signal original observé sur $\{0, \dots, N-1\}$;
- à appliquer sur la fonction d'autocorrélation une fenêtre d'apodisation $w_M(k)$ de support $\{-M, \dots, +M\}$ ($M < N$) ;
- à calculer la T.F. de cette nouvelle fonction d'autocorrélation.

(même principe dans le cas continu)

Estimation spectrale III : le corrélogramme lissé



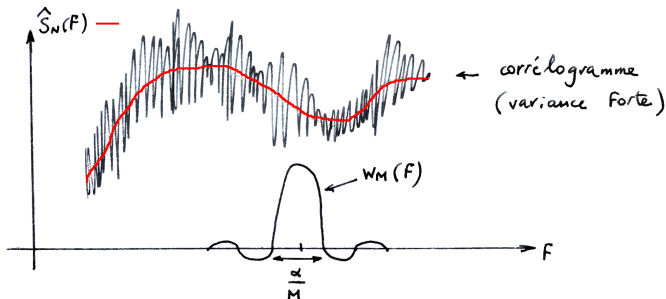
- Cas discret :

$$\hat{S}_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{R}_N(k) w_M(k) e^{-j2\pi kf}$$

avec :

$$\hat{R}_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n)X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases}$$

Estimation spectrale III : le corrélogramme lissé

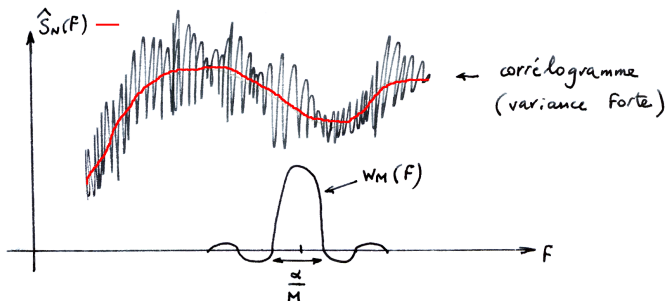


- Interprétation :

$$\hat{S}_N(f) = \mathcal{F}[\hat{R}_N(k)] * \mathcal{F}[w_M(k)] = \text{Corrélogramme} * W_M(f)$$

Cet estimateur revient donc à convoluer le corrélogramme par la T.F. de la fenêtre d'apodisation. Ceci a pour effet de lisser le corrélogramme (et donc de diminuer sa variance, au détriment de la résolution spectrale).

Estimation spectrale III : le corrélogramme lissé



- Performances : pour les fenêtres d'apodisation classiques dont le lobe principal a pour largeur α/M :

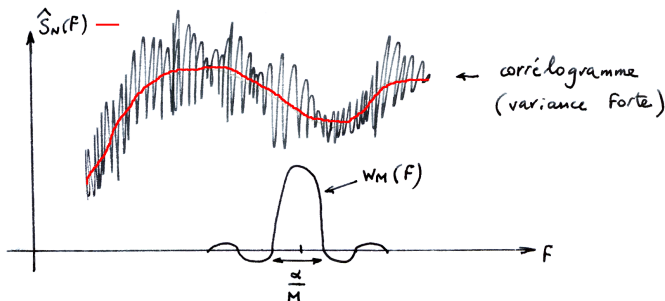
$$\mathbb{E}[\hat{S}_N(f)] \simeq S_X(f) * W_M(f) \quad (\hat{S}_N(f) \text{ est asymptotiquement biaisé})$$

$$\sigma^2[\hat{S}_N(f)] \propto \frac{M}{N} |S_X(f)|^2 \quad (\text{pour } M \text{ fixé, } \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma^2[\hat{S}_N(f)] = 0)$$

Le corrélogramme lissé permet donc de réduire fortement la variance au détriment du biais et de la résolution spectrale. Il a toutefois de bonnes propriétés :

- Pour avoir une bonne résolution spectrale il faut choisir M suffisamment grand (lobe principal de $W_M(f)$ étroit)
- Pour que la variance soit faible il faut simultanément que N (ou T) $\gg M$.

Estimation spectrale III : le corrélogramme lissé

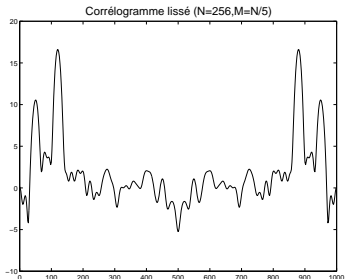
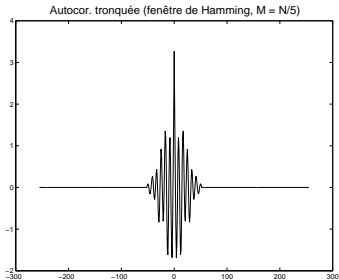
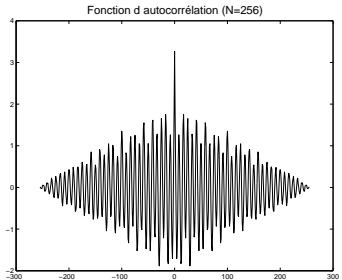


- Performances : pour les fenêtres d'apodisation classiques dont le lobe principal a pour largeur α/M :
 $\mathbb{E}[\hat{S}_N(f)] \simeq S_X(f) * W_M(f)$ ($\hat{S}_N(f)$ est asymptotiquement biaisé)

$$\sigma^2[\hat{S}_N(f)] \propto \frac{M}{N} |S_X(f)|^2 \quad (\text{pour } M \text{ fixé, } \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma^2[\hat{S}_N(f)] = 0)$$

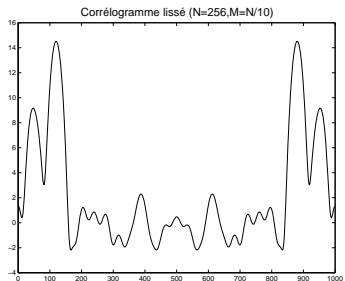
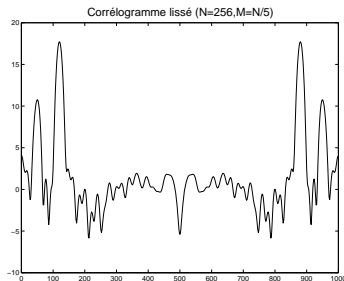
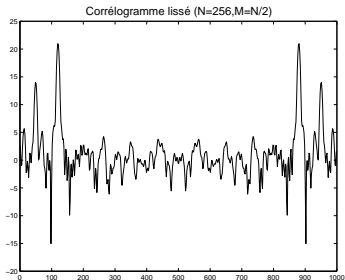
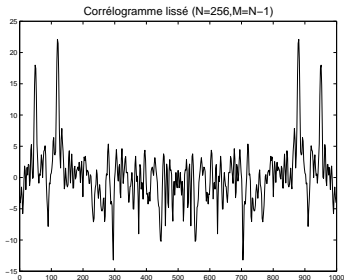
Le corrélogramme lissé permet donc de réduire fortement la variance au détriment du biais et de la résolution spectrale. Il a toutefois de bonnes propriétés :

- Pour avoir une bonne résolution spectrale il faut choisir M suffisamment grand (lobe principal de $W_M(f)$ étroit)
- Pour que la variance soit faible il faut simultanément que N (ou T) $\gg M$.



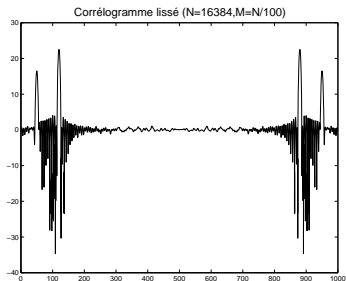
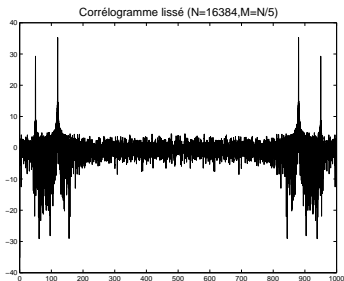
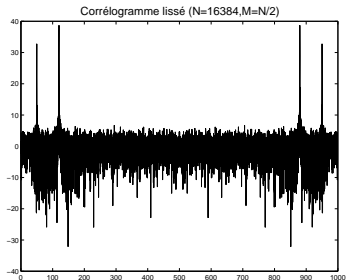
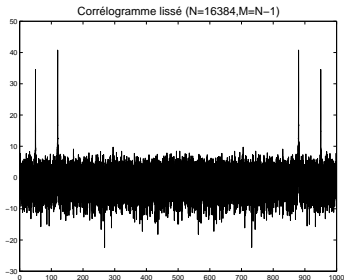
Corrélogramme (ou périodogramme) lissé (N=256, M=N/5)

Signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + 2 \sin 2\pi 120t + b(t)$



Corrélogramme (ou périodogramme) lissé (N=256, M variable)

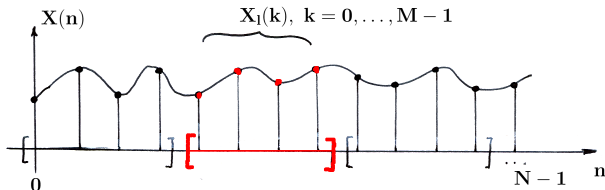
Signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + 2 \sin 2\pi 120t + b(t)$



Corrélogramme (ou périodogramme) lissé (N=16384, M variable)

$$x(t) = \sin 2\pi 50t + 2 \sin 2\pi 120t + b(t)$$

Estimation spectrale IV : le périodogramme moyenné



Une autre technique permettant d'améliorer les performances du périodogramme consiste à décomposer :

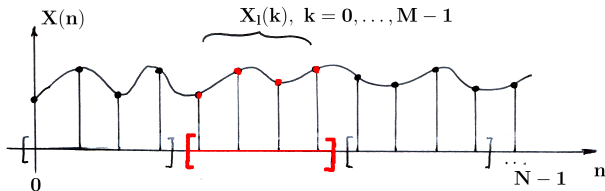
- le signal observé $\{X(n), n = 0, \dots, N - 1\}$ (N échantillons)
- en L sous-signaux plus courts : $\{X_l(k), k = 0, \dots, M - 1 ; l = 0, \dots, L - 1\}$ (M échantillons chacun).

On peut éventuellement introduire un recouvrement entre deux sous-signaux consécutifs.

On calcule alors un périodogramme sur chaque sous-signal X_l puis on effectue la moyenne de ces L périodogrammes :

$$\hat{S}_N(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ \frac{1}{M} \left| \sum_{k=0}^{M-1} X_l(k) e^{-j2\pi kf} \right|^2 \right\}$$

Estimation spectrale IV : le périodogramme moyenné



Ceci a pour effet :

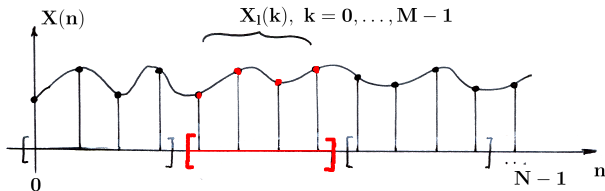
- ▶ de diviser la variance du périodogramme par un facteur L ;
- ▶ de diminuer la résolution spectrale du même facteur.
- ▶ par ailleurs, si on augmente M , on améliore la résolution spectrale.

En pratique on pourra par ex. choisir :

- ▶ M suffisamment grand pour avoir la résolution spectrale souhaitée ;
- ▶ L suffisamment grand pour diminuer la variance dans la proportion souhaitée ;
- ▶ et en déduire le nombre d'échantillons nécessaires N par : $LM \simeq 2N$ (recouvrement de moitié des sous-séquences).

Signalons enfin que l'on peut combiner un moyennage des estimateurs avec un lissage des périodogrammes estimés sur chaque sous-séquence ! (périodogramme lissé moyenné). En général on applique également une fenêtre d'apodisation avant de calculer les périodogrammes.

Estimation spectrale IV : le périodogramme moyenné



Ceci a pour effet :

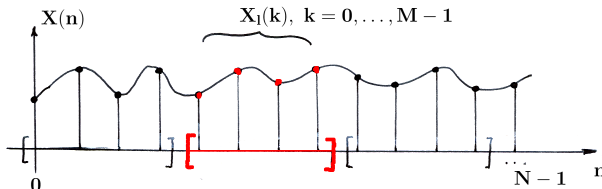
- ▶ de diviser la variance du périodogramme par un facteur L ;
- ▶ de diminuer la résolution spectrale du même facteur.
- ▶ par ailleurs, si on augmente M , on améliore la résolution spectrale.

En pratique on pourra par ex. choisir :

- ▶ M suffisamment grand pour avoir la résolution spectrale souhaitée ;
- ▶ L suffisamment grand pour diminuer la variance dans la proportion souhaitée ;
- ▶ et en déduire le nombre d'échantillons nécessaires N par : $LM \simeq 2N$ (recouvrement de moitié des sous-séquences).

Signalons enfin que l'on peut combiner un moyennage des estimateurs avec un lissage des périodogrammes estimés sur chaque sous-séquence ! (périodogramme lissé moyenné). En général on applique également une fenêtre d'apodisation avant de calculer les périodogrammes.

Estimation spectrale IV : le périodogramme moyenné



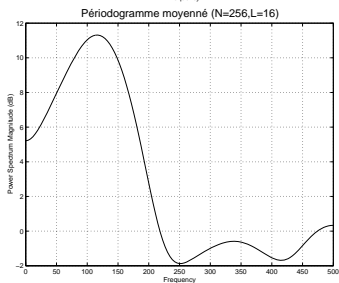
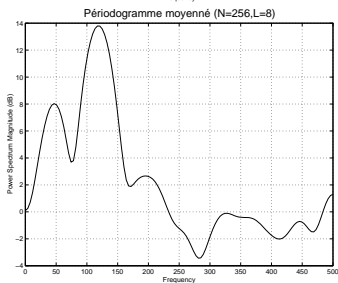
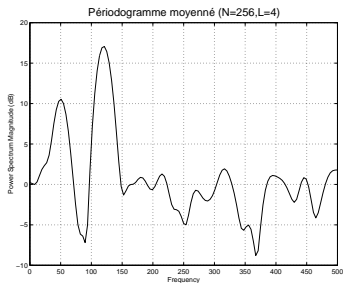
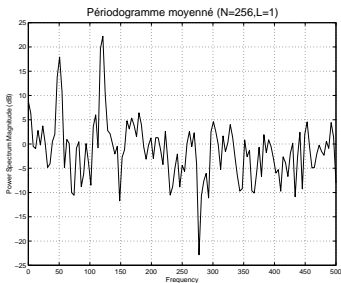
Ceci a pour effet :

- ▶ de diviser la variance du périodogramme par un facteur L ;
- ▶ de diminuer la résolution spectrale du même facteur.
- ▶ par ailleurs, si on augmente M , on améliore la résolution spectrale.

En pratique on pourra par ex. choisir :

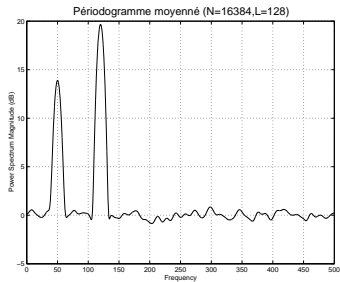
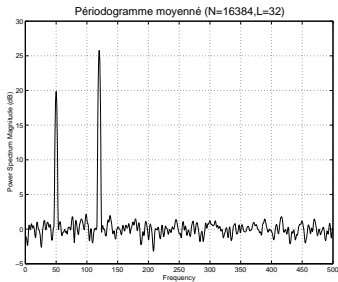
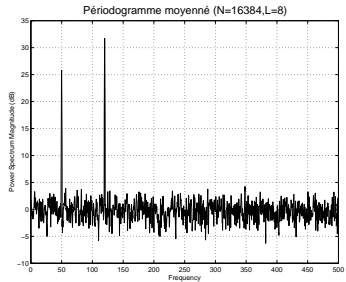
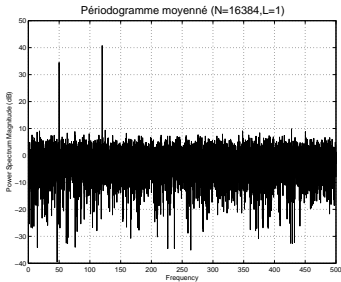
- ▶ M suffisamment grand pour avoir la résolution spectrale souhaitée ;
- ▶ L suffisamment grand pour diminuer la variance dans la proportion souhaitée ;
- ▶ et en déduire le nombre d'échantillons nécessaires N par : $LM \simeq 2N$ (recouvrement de moitié des sous-séquences).

Signalons enfin que l'on peut combiner un moyennage des estimateurs avec un lissage des périodogrammes estimés sur chaque sous-séquence ! (périodogramme lissé moyenné). En général on applique également une fenêtre d'apodisation avant de calculer les périodogrammes.



Périodogramme moyenné (N=256, L variable).

Signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + 2 \sin 2\pi 120t + b(t)$



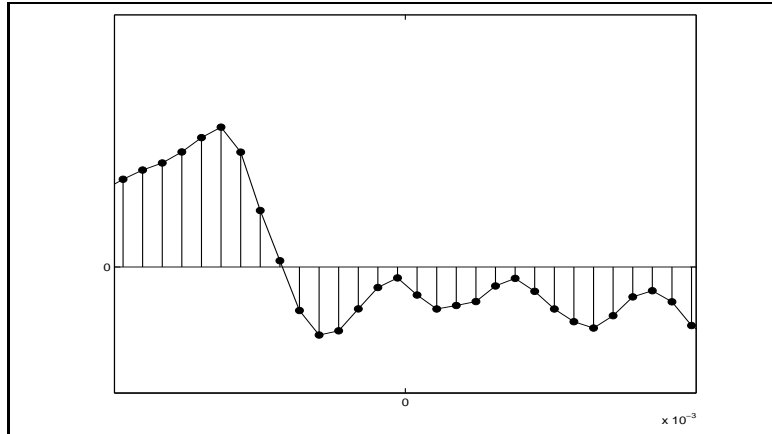
Périodogramme moyenné (N=16384, L variable).

Signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + 2 \sin 2\pi 120t + b(t)$

Annexe

Échantillonnage des signaux aléatoires

Échantillonnage d'un signal aléatoire



Un grand nombre de signaux aléatoires à temps discret sont obtenus par échantillonnage de signaux aléatoires à temps continu. Les relations entre caractéristiques statistiques sont les suivantes :

- signal à temps continu : $X_c(t)$
- signal échantillonné : $X_e(n) = X_c(n T_e)$

- Fonctions d'autocorrélation :

▷ signal continu : $R_{X_c}(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^*(t - \tau)]$

▷ signal échantillonné :

$$\begin{aligned} R_{X_e}(k) &= \mathbb{E}[X_e(n) X_e^*(n - k)] \\ &= \mathbb{E}[X_c(n T_e) X_c^*(n T_e - k T_e)] = R_{X_c}(k T_e) \end{aligned}$$

→ La fonction d'autocorrélation du signal échantillonné s'obtient en échantillonnant la fonction d'autocorrélation du signal continu.

- Densités spectrales de puissance

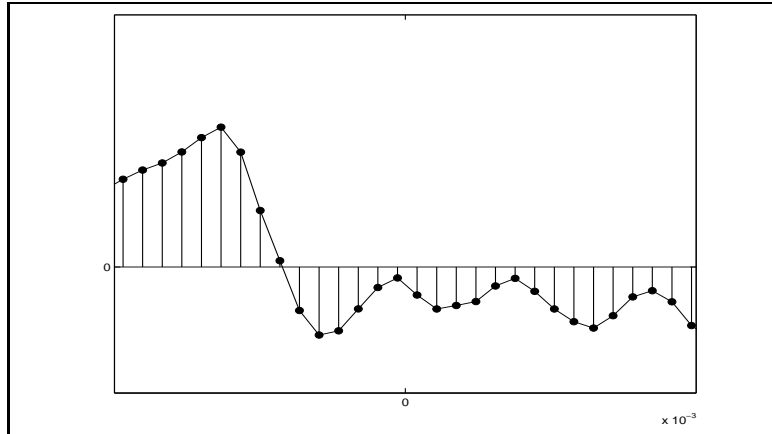
▷ signal continu : $S_{X_c}(f) = \mathcal{F}[R_{X_c}(\tau)]$

▷ signal échantillonné :

$$\begin{aligned} S_{X_e}(f) &= \mathcal{F}[R_{X_e}(k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{X_c}(kT_e) e^{-j2\pi k f t} \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{X_c}\left(\frac{f - k}{T_e}\right) \end{aligned}$$

→ La densité spectrale de puissance du signal échantillonné est obtenue par périodisation de la d.s.p. du signal continu. $S_{X_e}(f)$ est périodique de période 1.

Théorème de Shannon pour les signaux aléatoires



- Cas des signaux à bande limitée.

▷ D'après le théorème de Shannon, si le signal continu possède une d.s.p. $S_{X_c}(f)$ à bande limitée $[-B, +B]$, $R_{X_c}(\tau)$ peut être reconstruite par interpolation de ses échantillons, si $f_e = \frac{1}{T_e} > 2B$:

$$R_{X_c}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{X_c}(k) \frac{\sin \frac{\pi}{T_e}(\tau - kT_e)}{\frac{\pi}{T_e}(\tau - kT_e)}$$

▷ On a de plus le résultat suivant (admis) :

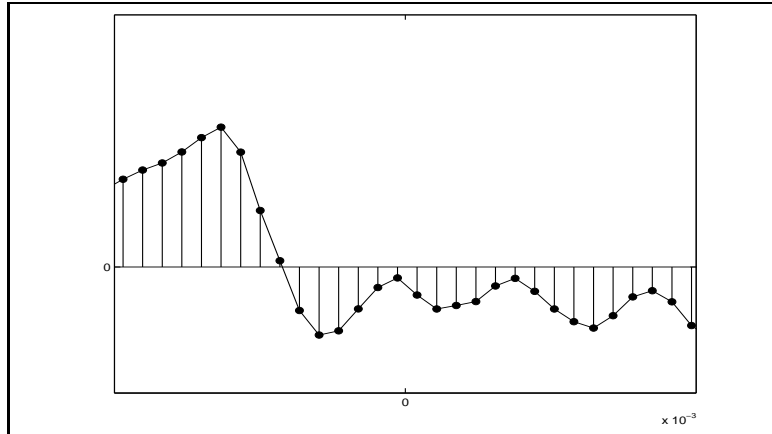
si $X_c(t)$ est échantillonné à une fréquence $f_e = \frac{1}{T_e} > 2B$, le signal :

$$\hat{X}_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_e(n) \frac{\sin \frac{\pi}{T_e}(t - nT_e)}{\frac{\pi}{T_e}(t - nT_e)}$$

est une reconstruction du signal $X_c(t)$ dans le sens où :

$$\mathbb{E}[(X_c(t) - \hat{X}_c(t))^2] = 0$$

Exemple : le bruit blanc discret

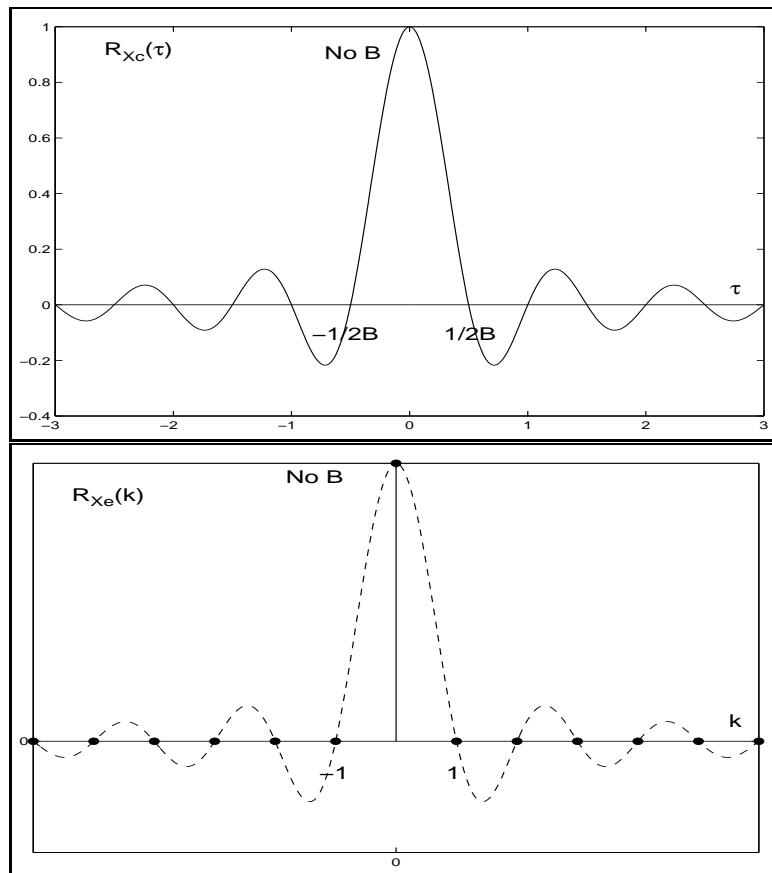


Un bruit blanc discret $X_e(n)$ peut être obtenu par échantillonnage d'un "bruit blanc physique" à temps continu, $X_c(t)$ de d.s.p. constante dans la bande $[-B, B]$:

$$\begin{cases} S_{X_c}(f) = \frac{N_0}{2} & \text{si } f \in [-B, B] \\ S_{X_c}(f) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on échantillonne $X_c(t)$ à la fréquence de Shannon $f_e = \frac{1}{T_e} = 2B$, on a les résultats suivants :

- Fonctions d'autocorrélation :



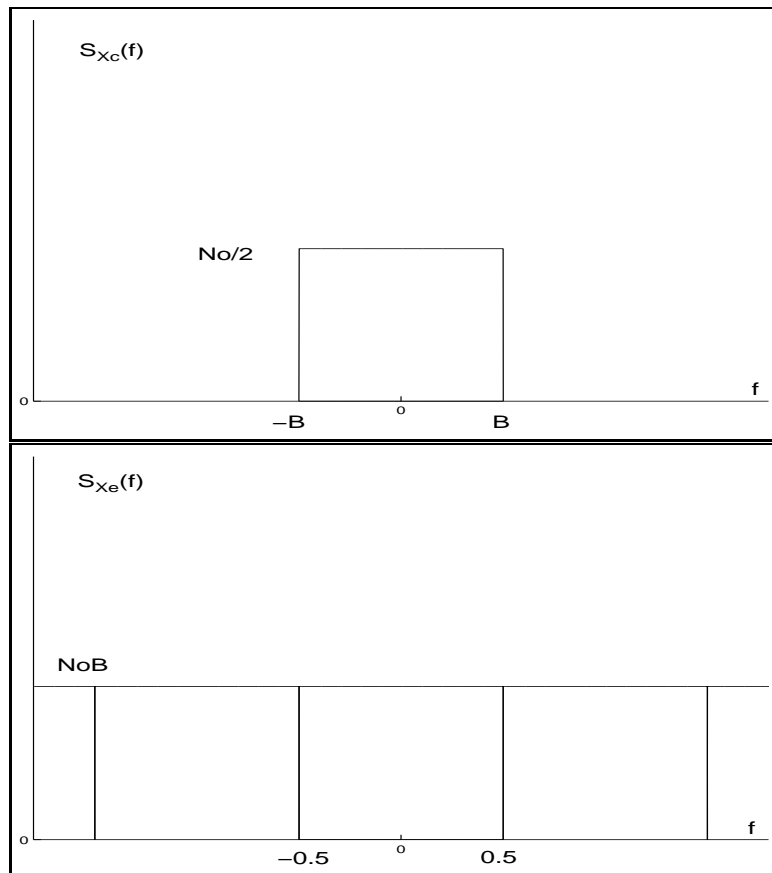
▷ signal continu :

$$R_{X_c}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)\right] = N_0 B \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau}$$

▷ signal échantillonné :

$$R_{X_e}(k) = R_{X_c}\left(\frac{k}{2B}\right) = N_0 B \delta(k)$$

- Densités spectrales de puissance

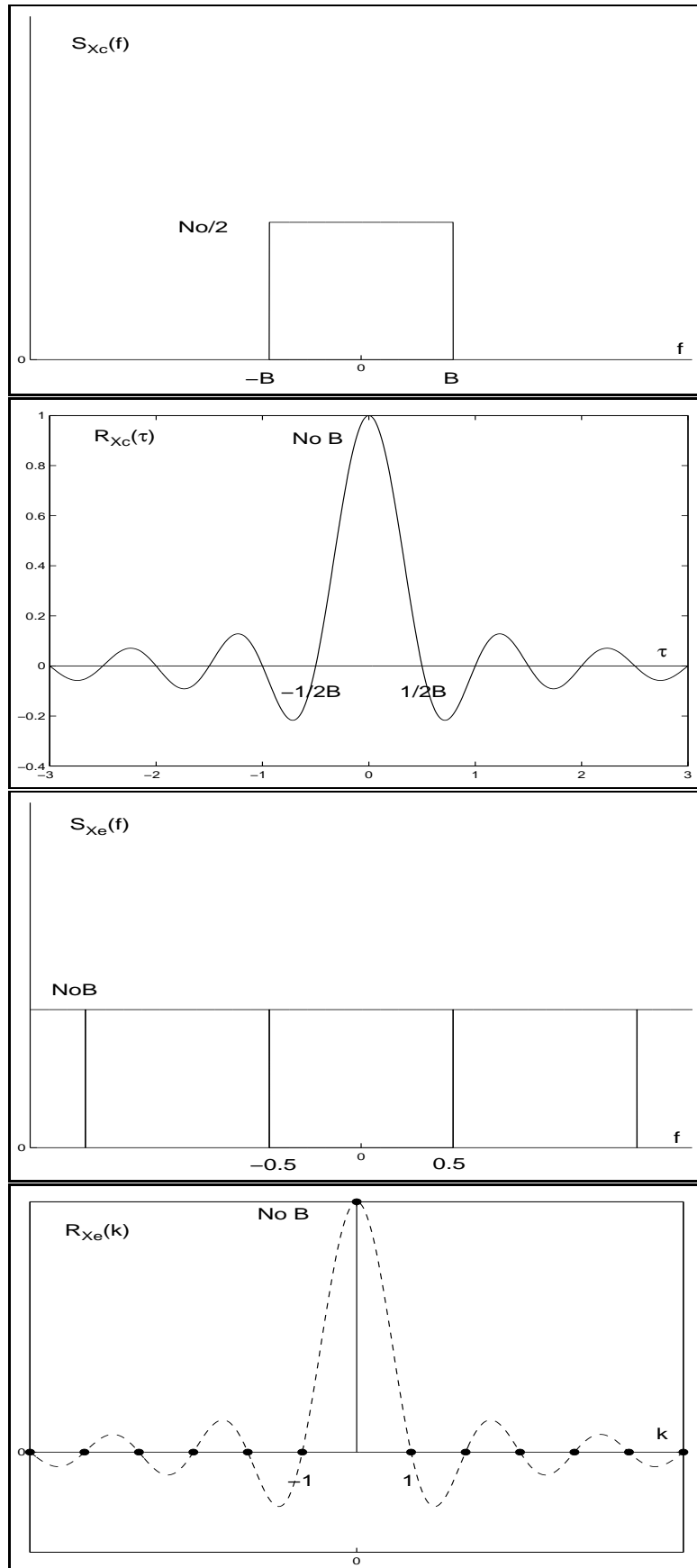


▷ signal continu : $S_{X_c}(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)$

▷ signal échantillonné :

$$\begin{aligned} S_{X_e}(f) &= 2B \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{X_c}(2B(f - k)) \\ &= N_0B \end{aligned}$$

$X_e(n)$ est donc un bruit blanc discret de puissance N_0B .



Obtention d'un bruit blanc discret par échantillonnage d'un "bruit blanc physique" de d.s.p. constante sur la bande $[-B, B]$.